# Résumé de cours : *Ensembles. Applications.*

**MPSI-Maths.**
**Mr Mamouni** : *mamouni.myismail@gmail.com*

**Source disponible sur:**
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولَهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

## 1 Applications et ensembles.

**Application**. Une application $f : E \to F$ est bien définie *si et seulement si* :

$$\begin{array}{ll} \forall\, x \in E & f(x) \in F \\ \forall\, (x, x') \in E^2 & x = x' \Rightarrow f(x) = f(x') \end{array}$$

**Injection**. Une application $f : E \to F$ est injective *si et seulement si* :

$$\forall\, (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

**Surjection**. Une application $f : E \to F$ est surjective *si et seulement si* :

$$\forall\, y \in F \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

**Bijection**. Une application $f : E \to F$ est bijective (injective et surjective) *si et seulement si* :

$$\forall\, y \in F \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

**Image directe d'une partie**. Soit $f : E \to F$, $A$ une partie de $E$ et $y \in F$.

$$y \in f(A) \text{ si et seulement si } \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$

**Propriétés**. Soit $f : E \to F$, $A$ et $B$ deux parties de $E$. On a les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} f(\emptyset) = \emptyset & f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) & f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \end{array}$$

**Image réciproque d'une partie**. Soit $f : E \to F$, $A$ une partie de $F$ et $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(A) \text{ si et seulement si } f(x) \in A.$$

**Propriétés**. Soit $f : E \to F$, $A$ et $B$ deux parties de $F$. On a les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) & f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{array}$$

## 2 Relations binaires.

Dans la suite on suppose $\Re$ une relation binaire définie sur un ensemble $E$.

**Réflexivité**. $\Re$ est dite réflexive *si et seulement si* : $\forall\, x \in E$ on a : $x\Re x$.

**Symetrie**. $\Re$ est dite symetrique *si et seulement si* : $\forall\, (x, y) \in E^2$ on a : $x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

**Antisymetrie**. $\Re$ est dite antisymetrique *si et seulement si* : $\forall\, (x, y) \in E^2$ on a :
$(x\Re y$ et $y\Re x) \Rightarrow x = y$.

**Relation d'équivalence**. $\Re$ est une relation d'équivalence *si et seulement si* : elle est à la fois réflexive, symetrique et transitive.

**Exemples**.

– Dans $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose : $a \Re b$ *si et seulement si* : $n$ divise $a-b$. On dit alors que $a$ est congru à $b$ modulo $n$ et on écrit : $a \equiv b\ [n]$.

– Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\overrightarrow{u} \Re \overrightarrow{v}$ *si et seulement si* : $\exists \lambda > 0$ tel que : $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

**Relation d'ordre**. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre *si et seulement si* : elle est à la fois réflexive, antisymetrique et transitive.

**Exemples**.

**1)** Dans $\mathbb{N}$, on pose : $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* : $a \leq b$. Ordre usuel.

**2)** Dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $a\mathcal{R}b$ *si et seulement si* : $a$ divise $b$.

**3)** Dans $\mathbb{N}^2$, on pose : $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si et seulement si* : $a \leq c$ et $b \leq d$.

**4)** Dans $\mathbb{N}^2$, on pose : $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si et seulement si* : $(a < c)$ ou $(a = c$ et $b \leq d)$. Ordre lexicographique.

**5)** Dans $\mathcal{P}(E)$, on pose : $A\mathcal{R}B$ *si et seulement si* : $A \subset B$.

**Ordre total ou partiel** : Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble est dite totale *si et seulement si* : Tous les éléments de $E$ sont comparable entre eux, c'est à dire que : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire c'est à dire quand : $\exists (x,y) \in E^2$ tel que : $x\mathcal{R}y$ fausse et $y\mathcal{R}x$ fausse, dans ce cas on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partielle.

**Majorant**. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble $E$ et $a$ et $b$ deux éléments de $E$, on dit que $b$ est un majorant de $a$ quand $a\mathcal{R}b$, et on dit que $b$ est un majorant d'une partie $A$ de $E$ quand $b$ est un majorant de tous les éléments de $A$. On dit que la partie $A$ admet un plus grand élément s'il existe un élément de $A$ qui majore tous les autres élément, dans ce cas il est unique et on le note $\max A$.

**Minorant**. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble $E$ et $a$ et $b$ deux éléments de $E$, on dit que $b$ est un minorant de $a$ quand $b \Re a$, et on dit que $b$ est un minorant d'une partie $A$ de $E$ quand $b$ est un minorant de tous les éléments de $A$. On dit que la partie $A$ admet un plus petit élément s'il existe un élément de $A$ qui minore tous les autres élément, dans ce cas il est unique et on le note $\min A$.

$\boxed{\text{Fin.}}$