Résumé de cours : *Ensembles finis. Dénombrement. Récurrence.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

I. Ensembles finis :

I.1 Notation : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[|1, n|]$ au lieu de $\{1, ..., n\}$.

I.2 Définition : Un ensemble E, non vide, est dit fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre E et $[|1, n|]$. Dans une telle situation l'entier n est unique, il s'appelle cardinal de E et se note $\operatorname{card}(E)$.
Par convention, l'ensemble vide est aussi fini, avec $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

I.3 Propriétés : Soient E, F deux ensembles finis, on a les résultats suivants :

1) Toute partie A de E est finie avec $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(E)$, on a égalité si et seulement si : $A = E$.

2) $E \cup F$ est fini avec : $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F)$.

3) $E \times F$ est fini avec $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$.

II. Applications et ensembles finis :

Soient E, F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application quelconque. On a les propriétés suivantes :

1) Si f est injective alors $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(F)$.

2) Si f est surjective alors $\operatorname{card}(E) \geq \operatorname{card}(F)$.

3) Si f est bijective alors $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.

4) Si f est injective (ou surjective) et $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$ alors f est bijective.

5) $\operatorname{card}(\mathcal{F}(E, F)) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$. Entre deux ensembles finis de cardinaux respectivement n et p, on peut construire exactement p^n applications.

6) $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\operatorname{card}(E)}$. Un ensemble à n éléments contient exactement 2^n parties.

III. Dénombrement :

Dans tout ce résumé cours n, p designent deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$.

III.1 Principe des bergers : Soit $f : E \to F$ telle que $\operatorname{card}(F) = p$, et chaque élément de F admet exactement n antécédants par f alors $\operatorname{card}(E) = np$.

III.2 Raisonnement par arbres : Si un arbre est formé p branches, dont chaque branche à son tour est formé par n branches, alors le nombre total des branches de l'arbre est np.

III.3 factoriels : $n! = 1\times 2\times \ldots n$ est le nombre de bijections qu'on peut définir sur un ensemble de cardinal n, par convention $0! = 1$.
C'est aussi le nombre de façons avec lesquelles on peut permuter n éléments ou n indices.
Et c'est aussi le nombre de façons avec lesquelles on peut placer n éléments dans n places.

III.4 Arrangements : $\mathcal{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ est le nombre d'injections qu'on peut définir sur un ensemble de cardinal p vers un ensemble de cardinal n.
C'est aussi le nombre de façons avec lesquelles on peut choisir p éléments parmi n, <u>en tenant compte de l'ordre</u> dans notre choix.

III.5 Combinaisons : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ est le nombre de façons avec lesquelles on peut choisir p éléments parmi n, <u>sans tenir compte de l'ordre</u> dans notre choix.
Noter aussi que dans un ensemble à n éléments il y a exactement $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ parties formées par p éléments. D'où l'égalité classique $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = 2^n$.
A retenir aussi la relation du *triangle de Pascal :*

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$$

<u>IV. Entiers naturels :</u>

Théorème 1 : Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.

Théorème 2 : Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide, majorée admet un plus grand élément.

Théorème 3 : Si A partie de $\mathbb{N}$ vérifiant : $\begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}; n \in A \Longrightarrow n+1 \in A \end{cases}$ alors $A = \mathbb{N}$.

<u>IV.1. Raisonnements par récurrence :</u> Dans cette partie $\mathcal{P}(n)$ est une propriété qui dépend de n. *Exemple* : $\mathcal{P}(n) = (n$ est pair$)$.

IV.1.1 Récurrence faible : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on peut vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puis supposer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Pour raisons de rédactions, il est parfois utile de supposer vérifier $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

IV.1.2 Récurrence forte : ou *avec prédecesseurs*. Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on peut vérifier que $\mathcal{P}(0), \ldots, \mathcal{P}(k)$ est vraie, puis supposer $\mathcal{P}(n), \ldots, \mathcal{P}(n+k)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\mathcal{P}(n+k+1)$ est vraie.
La récurrence forte la plus utilisée est celle avec 2 prédecesseurs, c'est à dire $k = 2$.

IV.1.3 Récurrence descendante : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall\ 0 \leq n \leq m$ on peut vérifier que $\mathcal{P}(m)$ est vraie, puis supposer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $1 \leq n \leq m$ et montrer que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.

IV.1.4 Récurrence double : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n,m)$ est vraie $\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2$ on peut fixer m, par exemple, et montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n,m)$ est vraie.

$\boxed{\text{Fin.}}$