Résumé de cours : *Entiers naturels*
Sup-MPSI, Rabat

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *mamouni.myismail@gmail.com*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنِين

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Théorème 1 : Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.

Théorème 2 : Si A partie de $\mathbb{N}$ vérifiant : $\begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}; n \in A \Longrightarrow n+1 \in A \end{cases}$ alors $A = \mathbb{N}$.

I. Raisonnements par récurrence : Dans cette partie $\mathcal{P}(n)$ est une propriété qui dépend de n. *Exemple* : $\mathcal{P}(n) = (n$ est pair$)$.

I.1 Récurrence faible : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on peut vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puis supposer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Pour raisons de rédactions, il est parfois utile de supposer vérifier $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

I.2 Récurrence forte : ou *avec prédecesseurs*. Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on peut vérifier que $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(k)$ est vraie, puis supposer $\mathcal{P}(n), \dots, \mathcal{P}(n+k)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\mathcal{P}(n+k+1)$ est vraie.
La récurrence forte la plus utilisée est celle avec 2 prédecesseurs, c'est à dire $k = 2$.

I.3 Récurrence descendante : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall\ 0 \leq n \leq m$ on peut vérifier que $\mathcal{P}(m)$ est vraie, puis supposer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $1 \leq n \leq m$ et montrer que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.

I.4 Récurrence double : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n,m)$ est vraie $\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2$ on peut fixer m, par exemple, et montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n,m)$ est vraie.

II. Manipulation des sommes et produits.

II.1 Manipulation des sommes simples.

$$\sum_{k=n}^{m} x_k = x_n + \cdots + x_m.$$

$$\sum_{i} x_i = \sum_{j} x_j$$ (l'indice est muet).

$$\sum_{k=n}^{m} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=n}^{m} x_k$$ (on peut faire sortir de la somme tout ce qui ne dépond pas de l'indice)

$$\sum_{k=n}^{m} \lambda = (m-n+1)\lambda.$$

$$\sum_{i} (x_i + y_i) = \sum_{i} x_i + \sum_{i} y_i.$$ ($\sum$ est additive).

Changement d'indices :

$$\sum_{k=n}^{m} x_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{m+1} x_k$$ (On ajoute aux bornes ce qu'on retranche à l'indice)

$$\sum_{k=n}^{m} x_{k-1} = \sum_{k=n-1}^{m-1} x_k$$ (On retranche aux bornes ce qu'on ajoute à l'indice)

Sommes particluières :

Somme géomètrique : $$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} a^k = & \quad a^m \frac{1-a^{m-n+1}}{1-a} \quad \text{si } a \neq 1 \\ = & \quad (m-n+1)a \quad \text{si } a = 1\end{aligned}$$

En particulier : $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k = & \quad \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{si } a \neq 1 \\ = & \quad (n+1)a \quad \text{si } a = 1\end{aligned}$$

Somme arithmétique : $$\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(m-n+1)(m+n)}{2}$$

II.2 Manipulation des sommes doubles.

Cas d'indices indépendants : $$\sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \right).$$

Cas d'indices dépendants : $$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} = & \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} x_{i,j} \right) \\ = & \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} \right)\end{aligned}$$

Règle à suivre : Pour l'indice de la somme interne on prend les bornes les plus proche, pour celui de la somme externe on prend les bornes extremales.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) = \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} x_i y_j.$$

II.2 Manipulation des produits.

$$\prod_{i=n}^{m} (x_i y_i) = \prod_{i=n}^{m} x_i \prod_{i=n}^{m} y_i.$$

$$\prod_{i=n}^{m} \lambda x_i = \lambda^{m-n+1} \prod_{i=n}^{m} x_i.$$

$$\prod_{i=n}^{m} (x_i + y_i) \neq \prod_{i=n}^{m} x_i + \prod_{i=n}^{m} y_i, \text{ en général } \prod_i \sum_j \neq \sum_j \prod_i.$$

Fin.