بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Équations différentielles*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

Blague du jour :
Problème de la casserole de Poincaré :
Dans une pièce, se trouve : un évier muni d'un robinet d'eau courante, une casserole accrochée à un mur, un réchaud à gaz et une boîte d'alumettes.
Problème : comment faire chauffer de l'eau ?
Solution : on prend la casserole, on la remplit d'eau, on la pose sur le réchaud que l'on allume.
Deuxième problème : nous sommes dans la même pièce, mais à présent, la casserole est remplie d'eau, posée sur le réchaud. La question est la même : faire chauffer de l'eau.
Solution du physicien : on allume le réchaud.
Solution du mathématicien : on vide la casserole, on la raccroche au mur, et on est ramené au problème précédent.

Mathématiciens du jour : Poincaré
Henri Poincaré (1854-1912) est un mathématicien, physicien et philosophe français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. C'est l'un fondateur de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité. C'est le père incontestable de la topologie algèbrique. Il entre premier à l'École polytechnique en 1873, puis y enseigna l'analyse, la mécanique et l'astronomie. En 1904 Poincaré posa une conjecture portant un problème de topologie. En l'an 2000, l'institut Clay plaça la conjecture parmi les sept problèmes du prix du millénaire. Il promit un million de dollars américains à celui qui démontrerait ou réfuterait la conjecture. Grigori Perelman (russe) a démontré cette conjecture en 2003, et sa démonstration fut validée en 2006. Mais le chercheur a refusé aussi bien la médaille Fields que le million de dollars jugeant ces récomponses sans intérêt. De façon plus anecdotique, il détient jusqu'à maintenant le record de la moyenne des notes obtenues au concours d'entrée à l'École polytechnique. Il entra major, et en sortit deuxième. Concernant son admission à l'École polytechnique, il aurait été le seul étudiant à y avoir été admis alors qu'il avait obtenu un zéro à une épreuve de dessin , ce qui constitue normalement une note éliminatoire. Ce qui aurait penché en sa faveur serait le fait qu'il ait obtenu la note maximale, soit 20/20, à toutes les autres épreuves. Cette entorse au règlement demeure unique dans l'histoire de l'École

1 *Equations différentielles du 1ér ordre :*

Elles sont de la forme : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$**.**
Alors $y(x) = y_H(x) + y_0(x)$

$y_H(x) = \lambda z(x)$ **avec** $z(x) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}dt}$	$y_0(x) = \lambda(x)z(x)$ **avec** $\lambda'(t) = \dfrac{c(t)}{a(t)z(t)}$

2 *Equations différentielles du 2éme ordre :*

Elles sont de la forme : $ay"(x) + by'(x) + cy(x) = e^{\lambda x}P(x)$ **avec** $(a, b, c, \lambda) \in \mathbb{C}^4; P \in \mathbb{C}[X]$**.**
Soit (*) $aX^2 + bX + c = 0$ **l'équation caractéristque et** $\Delta = b^2 - 4ac$**.**
On a alors
$y(x) = y_H(x) + y_0(x)$ **tel que**

Cas possibles	$y_H(x) =$	$y_0(x) = e^{\lambda x}Q(x)$ $Q(x)$ **polynôme**
$\Delta > 0$ r_1, r_2 **solutions de (*)**	$Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$	$\deg Q = \deg P + 1$ **si** λ **solution de (*)** $\deg Q = \deg P$ **si non**
$\Delta = 0$ r **solution de (*)**	$(Ax + B)e^{rx}$	$\deg Q = \deg P + 2$ **si** λ **solution de (*)** $\deg Q = \deg P$**si non**
$\Delta < 0$ $\alpha + i\beta$ **solution de (*)**	$(A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$	$\deg Q = \deg P + 1$ **si** λ **solution de (*)** $\deg Q = \deg P$**si non**

Résoudre : $y'(x)\sin x - y(x)\cos x = e^x \sin^4 x; y" + 4y' + 4y = e^{-2x}(x^2 + 1);$
$y" + 4y' + 4y = e^{2x}(x^2 + 1); y" + y = xe^x, y" + y = x\cos x, y" + y' - 2y = x^2 + 1$**.**

$\boxed{\textbf{Fin.}}$