Résumé de cours : *Espaces vectroriels.*
PARTIE II : *Dimension finie.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

1 Notions préliminaires

Définition 1. *Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.*

Théoréme 1. ***Théorème de la base incompléte***
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrice finie pour avoir une base.

Corollaire 1. *Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base finie.*

Théoréme 2. *Dans un $\mathbb{K}$-ev, E, de dimension finie toutes les bases sont finie et ont même cardinal, leur cardinal commun s'appelle base de E et se note* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Théoréme 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, alors toutes les familles libres sont de cardinal inférieur à n et touttes les familles génératrices sont de cardinal supérieur à n. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de E on a le résultat suivant :*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \text{ est une base de } E &\iff \mathcal{B} \text{ est libre de cardinal } n \\ &\iff \mathcal{B} \text{ est génératrice de cardinal } n \end{aligned}$$

2 Dimensions de quelques espace vectoriel

Théoréme 4. *Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors tout sous espace vectoriel , F de E est de dimension finie inférieur à celle de E, avec égalité si et seulement si $E = F$. Avec la convenion que $\{0_E\}$ est le seul sous espace vectoriel de dimension nulle.*

Théoréme 5. *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors $E \times F$ sont aussi de dimension finie avec l'égalité :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

Corollaire 2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

Théoréme 6. *Soit F et G deux sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev , E, de dimension finie tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 3. *Si F et G sont deux sous espace vectoriel supplémenataires d'un $\mathbb{K}$-ev , E, de dimension finie alors :* $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 4. *Soit F et G deux sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev , E, de dimension finie alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$$

3 Applications linéaires en dimension finie.

3.1 Résultats généraux

Théoréme 7. *Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Théoréme 8. *Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphe si et seulement si ils sont de même dimension.*

Théoréme 9. *Soit $u : E \to F$ linéaire, avec E de dimension finie. Alors :*
u est un isomorphisme $\iff$ u transforme toute base de E en une base de F
$\iff$ u transforme au moins une base de E en une base de F

Théoréme 10. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est de dimension finie avec l'égalité :* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E).\dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 5. *Si E est une $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors son espace dual, E^* est aussi de dimension finie avec :* $\dim_{\mathbb{K}}(E^*) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Corollaire 6. *Si E est une $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, alors il existe une unique base de E^*, notée $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ et appelée base duale de $\mathcal{B}$ vérifiant la propriétés suivante :* $e^*(e_j) \begin{cases} = 1 \text{ si } i = j \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Théoréme 11. *Une application linéaire est entiérement déterminée par ses valeurs sur une base de l'ensemble de départ.*

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2. *Le rang d'une application linéaire, u est par définition la dimension de son image, on le note* $\mathrm{rg}(u)$, *autrement dit :*
$\mathrm{rg}(u) = \dim_{\mathbb{K}}$ *Im u.*

Théoréme 12. ***Formule du rang***
Soit $u : E \to F$ linéaire avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, on a le résultat suivant :

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \ker u + \dim_{\mathbb{K}} \ Im\ u$$

Corollaire 7. *Le rang est invariant par composition à gauche ou a droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors :* $\mathrm{rg}(v\circ u) = \mathrm{rg}(u)$ *et* $\mathrm{rg}(u\circ v) = \mathrm{rg}(u)$.

Corollaire 8. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et égales, on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} u \text{ isomorphisme} &\iff u \text{ injective} \\ &\iff u \text{ injective} \end{aligned}$$

3.3 Formes linéaires et hyperplans

Définition 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n, on appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel de E de dimension $n-1$.*

Propriétés.
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et φ une forme linéaire sur E non nulle, alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de E, en particulier φ est surjective.
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E, alors il existe une forme linéaire φ telle que $H = \ker\varphi$.
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, deux formes linéaires sur E de même noyau sont proportionnelles.
- Tout hyperplan H d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E égale à n admet une équation de la forme $H : a_1x_1 + \dots a_nx_n = 0$ unique à une constante multiplicative prés.

$\boxed{\text{Fin.}}$