

RÉSUMÉ DE COURS : *Espaces vectoriels* *Euclidiens*

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Table des matières

1	Produit scalaire.	2				
1.1	Norme euclidienne.	2		3.2	Distance d'un élément x de E à un sous espace vectoriel F . 4	
1.2	Distance euclidienne.	2		3.3	Rotations.	4
1.3	Vecteurs unitaires.	2		3.4	Symétrie orthogonales.	5
1.4	Vecteurs orthogonaux.	2		3.5	Automorphismes orthogonaux.	5
1.5	Sous espaces orthogonaux.	2	4	Matrices orthogonales.	5	
1.6	Orthogonal d'un sous espace vectoriel	2	5	Automorphismes orthogonaux du plan.	5	
1.7	Famille orthogonale.	3		5.1	Propriétés des rotations du plan.	6
1.8	Famille orthonormale.	3	6	Automorphismes orthogonaux de l'espace.	6	
2	Espace euclidien.	3		6.1	Propriétés des rotations de l'espace.	6
2.1	Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.	3				
2.2	Produit vectoriel.	4				
2.3	Produit vectoriel en dimension 3.	4				
3	Applications linéaires et espaces euclidiens.	4				
3.1	Projection orthogonale.	4				

Dans tout le chapitre E est un \mathbb{R} -espace vectoriel .

1 Produit scalaire.

Définition 1. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire définie sur $E \times E$ symétrique définie positive. Autrement dit une application $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

Bilinéaire :

$$\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle, \forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \lambda \langle x, y_2 \rangle, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Symétrique : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall (x, y) \in E^2$.

Définie : $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Positive : $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$.

1.1 Norme euclidienne.

On définit alors la norme euclidienne sur E ainsi : pour tout $x \in E$ on pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

et on a les propriétés suivantes : $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnels.

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle|, \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2|\langle x, y \rangle|.$$

Identité du parallélogramme. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Identité de polarisation. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Inégalité triangulaire. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2 Distance euclidienne.

On définit alors la distance euclidienne sur E^2 ainsi : pour tout $(x, y) \in E^2$ on pose :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On a les propriétés suivantes : $\forall (x, y, z) \in E^3$.

$$d(x, x) = 0$$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{Inégalité triangulaire}$$

1.3 Vecteurs unitaires.

Ce sont les $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, tout $x \neq 0_E$ peut être normalisé pour obtenir l'élément unitaire, $\frac{x}{\|x\|}$.

1.4 Vecteurs orthogonaux.

On dit que deux éléments $(x, y) \in E^2$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire : $\langle x, y \rangle = 0$, on écrit alors : $x \perp y$.

Propriétés.

$$- 0_E \perp x, \forall x \in E.$$

$$- \text{Si } x \perp x \text{ alors } x = 0_E.$$

1.5 Sous espaces orthogonaux.

Deux sous espace vectoriel F et G de E sont dits orthogonaux si et seulement si chaque élément de F est orthogonal à chaque élément de G , on écrit alors : $F \perp G$.

1.6 Orthogonal d'un sous espace vectoriel .

Soit F un sous espace vectoriel de E , l'ensemble des éléments de E orthogonaux à ceux de F , noté F^\perp est un sous espace vectoriel de E , appelé l'orthogonal de F , notez bien que : $y \in F^\perp \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in F$.

Propriétés.

$$- F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

$$- E^\perp = \{0_E\}.$$

$$- \{0_E\}^\perp = E.$$

1.7 Famille orthogonale.

C'est toute famille $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ formée par des éléments deux à deux orthogonaux, càd : $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

Théorème de Pythagore.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille orthogonale, alors :

$$\|e_1 + \dots + e_m\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_m\|^2.$$

1.8 Famille orthonormale.

C'est toute famille $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ formée par des éléments unitaires deux à deux orthogonaux, càd : $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Propriété.

Toute famille orthonormale est libre.

Théorème.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille orthonormale, alors $\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2$.

2 Espace euclidien.

C'est tout \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Dans toute la suite on considère E espace vectoriel euclidien de dimension n .

2.1 Procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt.

De toute base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E , on peut construire une base orthogonale $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$, en posant :

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2 + \lambda e'_1 && \text{avec } \lambda \text{ obtenue à l'aide de la relation } \langle e'_2, e'_1 \rangle = 0 \\ &\vdots \\ e'_n &= e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1} && \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \text{ obtenues à l'aide des relations :} \\ &&& \langle e'_n, e'_1 \rangle = \dots = \langle e'_n, e'_{n-1} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Corollaire 1. *Tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale.*

Théorème 1. *Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale. $\forall (x, y) \in E^2$, on a les résultats suivants :*

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle.$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

Théorème 2. Théorème de la base orthonormale incomplète. *Toute famille orthonormale peut être complétée pour obtenir une base orthonormale.*

Corollaire 2. *Soit F un sous espace vectoriel de E , alors F et F^\perp sont supplémentaire dans E , càd :*

$$E = F \oplus F^\perp$$

En particulier $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Corollaire 3. *Pour toute forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in E$.*

2.2 Produit vectoriel.

Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , et $(x_i)_{1 \leq i \leq n-1} \in E^{n-1}$ famille fixée de $n-1$ éléments, alors l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une

$$x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

forme linéaire, il existe donc un unique élément de E , noté $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et

appelé produit vectoriel des $(x_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ tel que

$$\varphi(x) = \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle, \forall x \in E, \text{ autrement dit :}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle, \forall x \in E.$$

2.3 Produit vectoriel en dimension 3.

Propriétés.

L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

$$(x, y) \mapsto x \wedge y$$

$$x \wedge y \perp x \text{ et } x \wedge y \perp y, \forall (x, y) \in E^2.$$

$$\text{Si } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } x \wedge y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

(u, v, w) est une base orthonormale directe de \mathbb{R}^3 si et seulement si $\|u\| = \|v\| = 1, \langle u, v \rangle = 0$ et $w = u \wedge v$.

3 Applications linéaires et espaces euclidiens.

3.1 Projection orthogonale.

Définition 2. Une projection $p : E \rightarrow E$ est dite orthogonale E si et seulement si $\text{Imp} = (\text{Ker} p)^\perp$.

Théorème 3. Soit $p : E \rightarrow E$ linéaire, alors p est une projection orthogonale sur E si et seulement si $p^2 = p$ et $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle, \forall (x, y) \in E^2$.

Théorème 4. Soit $p : E \rightarrow E$ linéaire, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$, alors p est une projection orthogonale si et seulement si $M^2 = M$ et ${}^t M = M$.

Théorème 5. Soit p projection orthogonale de rang r et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base orthonormale de Imp , alors $\forall x \in E$ on a : $p(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i$.

3.2 Distance d'un élément x de E à un sous espace vectoriel F .

Définition 3. On la note $d(x, F)$ et c'est par définition la plus petite distance de x aux éléments de F .

Théorème 6. $d(x, F) = d(x, p_F(x))$, où $p_F(x)$ désigne la projection orthogonale de x sur F .

Corollaire 4. Si $\dim F = r$ et $(e_i)_{r+1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de F^\perp , alors

$$d(x, F)^2 = \sum_{i=r+1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

3.3 Rotations.

Ce sont qui transforment toute base orthonormale directe de E en une base orthonormale directe de E . Leur déterminant vaut toujours 1.

3.4 Symétrie orthogonales.

Définition 4. Ce sont les applications linéaires $s : E \rightarrow E$ telles que $s^2 = id_E$ dont les sous espaces propres associés sont orthogonaux, i.e : $Ker(s+id_E) = Ker(s-id_E)^\perp$.

Réflexions. Ce sont les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, i.e : $\dim Ker(s-id_E) = n - 1$.

Remarque. Pour toute réflexion s de E on a : $\det(s) = (-1)^{n-1}$.

3.5 Automorphismes orthogonaux.

Définition 5. On appelle automorphisme orthogonal de E , toute application linéaire $u : E \rightarrow E$ qui conserve le produit scalaire. c.à.d : $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall (x, y) \in E^2$.

Théorème 7. Soit une application linéaire $u : E \rightarrow E$, on a les équivalences suivantes : u conserve le produit scalaire si et seulement si u conserve la norme i.e : $\|u(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$. si et seulement si u conserve la distance i.e : $d(u(x), u(y)) = d(x, y), \forall (x, y) \in E^2$, on dit aussi que c'est un isométrie.

Propriété.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux est sous-groupe de $GL(E)$, on l'appelle le groupe orthogonal et on le note $O(E)$.

Théorème.

Soit une application linéaire $u : E \rightarrow E$, on a les équivalences suivantes :

u est automorphisme orthogonal de E

si et seulement si u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E . si et seulement si u transforme au moins une base orthonormale de E en une base orthonormale de E .

4 Matrices orthogonales.

Définition 6. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si et seulement si elle vérifie l'une des relations suivantes, (qui sont d'ailleurs équivalentes) : $M^t M = I_n$ ou bien $MM^t = I_n$.

Propriété.

L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, on l'appelle le groupe orthogonal d'ordre n et on le note $O(n)$.

Remarque.

Si $M \in O(n)$, alors $\det(M) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales directes ($\det(M) = 1$), est un sous-groupe de $O(n)$, on l'appelle le groupe spécial d'ordre n et on le note $SO(n)$.

Théorème.

$M \in O(n)$ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n pour son produit scalaire canonique.

Corollaire 5. Soit une application linéaire $u : E \rightarrow E$, on a les équivalences suivantes :

u est automorphisme orthogonal de E

si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale de E est une matrice orthogonale.

si et seulement si sa matrice dans au moins une base orthonormale de E est une matrice orthogonale.

Corollaire 6. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormales de E , alors $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale, en particulier $P^{-1} = {}^t P$.

5 Automorphismes orthogonaux du plan.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice de u dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Pour que M soit orthogonale il faut que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$, dans ce cas u est soit une rotation $u = r_\theta$ (si $\det M = 1$) ou bien symétrie

axiale $u = s_\Delta$ (si $\det M = -1$).

Si $\det M = 1$, on trouve θ à l'aide de la relation $a = \cos \theta, b = \sin \theta$.

Si $\det M = -1$, alors Δ est la droite faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe (ox) , on trouve θ à l'aide de la relation $a = \cos \theta, b = \sin \theta$.

5.1 Propriétés des rotations du plan.

- $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$.
- $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.
- $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta, \det(x, y) = \|x\| \|y\| \sin \theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ faisant un angle θ entre eux.
- Toute rotation du plan d'angle θ peut être décomposé en deux réflexions dont les axes font un angle $\frac{\theta}{2}$ entre eux.

- $\det(x, y)$ est égal à la surface du parallélogramme de cotés x et y .

6 Automorphismes orthogonaux de l'espace.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les colonnes sont respectivement C_1, C_2, C_3 pour vérifier que M est une matrice orthogonale il suffit de vérifier que M est orthogonale il suffit de vérifier que $\|C_1\| = \|C_2\| = 1, \langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0$.

Si $C_1 \wedge C_2 = C_3$, alors $\det M = 1$ et dans ce cas M est la matrice d'une rotation $r_{\Delta, \theta}$ d'axe Δ et d'angle θ . On trouve Δ à l'aide du système $MX = X$ et θ à l'aide des relations $\text{Tr}(M) = 1 + 2 \cos \theta$ et $\sin \theta$ de même signe que $\det(e_1, C_1, a)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$ et a vecteur qui dirige l'axe Δ .

6.1 Propriétés des rotations de l'espace.

Toute rotation de l'espace se décompose en produit de deux réflexions.
 $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta, \|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin \theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ faisant un angle θ entre eux.

Soit r la rotation d'axe Δ dirigé par a et d'angle θ , alors $\forall x \perp \Delta$ on a :
 $r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)a \wedge x$.

Fin.