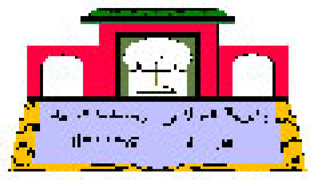
.

بسم الله الرحمن الرحيم
و على الله فليتوكل المتوكلون

صدق الله العظيم

Résumé de cours : *Fonctions usuelles*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat



25 octobre 2008

La blague du jour. ***source : site internet***
Alors c'est Logarithme et Exponentielle qui sont dans une fête, Logarithme s'eclate comme une folle, elle se fend la gueule, elle se fait des amis, elle est mega sociable et tout. Exponentielle, elle, est toute triste assise dans son coin, alors logarithme va la voir et lui dit : "bah kesta, t'es toute triste, vient t'amuser avec nous... -bof, tu sais moi, que je m'integre ou que je m'integre pas, le resultat est le meme"

1 Fonctions logarithmiques.

$\forall a > 0, \quad \forall x > 0$ **on pose** $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$**, log en base** a **où** $\ln$ **désigne le logarithme népérien.**
Propriétés. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $n \in \mathbb{Z}$ **et** $x > 0$**, on a les propriétés suivantes :**

- $lnab = \ln a + \ln b$.
- $\ln(a^n) = n \ln a$.
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- $\ln x' = \dfrac{1}{x}$
- $\displaystyle\int \ln x = x \ln x - x + Cte$.

2 Fonctions exponentielles.

$\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **on pose :** $a^x = e^{x \ln a}$**, exponentielle en base** a**. Propriétés. Pour tout** $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ **et** $x \in \mathbb{R}$**, on a :**

- $e^{\ln x} = x, \ln e^x = x$
- $e^{a+b} = e^a e^b$.
- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $(e^a)^n = e^{na}$.
- $(e^x)' = \dfrac{1}{x}$ **et** $\displaystyle\int e^x = e^x + Cte$.

3 Fonctions hyperboliques.

Cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}$**, on pose :** $\text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Sinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}$**, on pose :** $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$**.**

Cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}$**, on pose :** $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$**.**

Propriétés. Pour tous réels a, b **on a :**

- $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$.
- $\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$.
- $\operatorname{ch} -a = \operatorname{ch} a$ **et** $\operatorname{sh} -a = -\operatorname{sh} a$.
- $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b$.
- $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{ch} a \operatorname{sh} a$.
- $\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$.
- $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$.
- $\operatorname{th}(2a) = \dfrac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$.
- $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$ **et** $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$.
- $\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.

4 Fonctions circulaires.

- $\cos' x = -\sin x$ **et** $\sin' x = \cos x$.
- $\tan' x = \dfrac{1}{\tan^2 x}$ **pour tout** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.
  (quand les tangentes existent)
- $\cos(a) + \cos b = 2 \cos \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$.
- $\sin(a) + \sin b = 2 \cos \dfrac{a-b}{2} \sin \dfrac{a+b}{2}$.

Et toutes les autres propriétés peuvent s'en déduire à parir des formules suivantes :

- $\cos(a+\pi) = -\cos a$.
- $\sin(a+\pi) = -\sin a$.
- $\cos(\pi - a) = -\cos a$.
- $\sin(\pi - a) = \sin a$.
- $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a$.
- $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a$.
- $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$.
- $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$.

5 Fonctions circulaires réciproques.

- $\cos$ **est bijective de** $[0, \pi]$ **vers** $[-1, 1]$ **dont l'application réciproque est** $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ **telle que :** $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$.
  $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x$.
  $\forall \theta \in [0,\pi],\ \arccos(\cos\theta) = \theta$**, mais si** $\theta \notin [0,\pi]$ **on cherche** $\alpha \in [0,\pi]$ **tel que** $\cos\alpha = \cos\theta$**, dans ce cas** $\arccos(\cos\theta) = \alpha$ **(plus précisement :** $\alpha \equiv \pm\theta\ [2\pi]$**).**
- $\sin$ **est bijective de** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **vers** $[-1,1]$ **dont l'application réciproque est** $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **telle que :** $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$.
  $\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arcsin x) = x$.
  $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin\theta) = \theta$**, mais si** $\theta \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **on cherche** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **tel que** $\sin\alpha = \sin\theta$**, dans ce cas** $\arcsin(\sin\theta) = \alpha$ **(plus précisement :** $\alpha \equiv \theta$ **ou** $\pi - \theta\ [2\pi]$**).**
  $\tan$ **est bijective de** $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **vers** $\mathbb{R}$ **dont l'application réciproque est** $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **telle que :** $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$.
  $\forall \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan\theta) = \theta$**, mais si** $\theta \notin \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **on cherche** $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **tel que** $\tan\alpha = \tan\theta$**, dans ce cas** $\arctan(\tan\theta) = \alpha$ **(plus précisement :** $\alpha \equiv \theta\ [\pi]$**).**

Fin.