Résumé de cours : *Fractions rationnelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Table des matières

1 Le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

1.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$.

Rappel :
Tout anneau intégre, A est contenu dans un corps, le plus petit de ses corps, unique à isomorphisme prés, s'appelle corps des fractions de A et se note $K(A)$, il est construit à l'aide de la relation d'équivalence suivante définie sur $A \times A^*$ par : $(a,b)\Re(c,d) \Longleftrightarrow ac - bd = 0$, $K(A)$ est l'ensemble des classes d'équivalences $\overline{(a,b)}$ pour cette relation, chaque classe $\overline{(a,b)}$ est abusivement notée $\frac{a}{b}$, Ainsi $K(A) = \left\{\frac{a}{b} \text{ tel que : } (a,b) \in A \times A^*\right\}$.
Le corps des fractions de l'anneau intégre $\mathbb{K}[X]$ se note $\mathbb{K}(X)$ dont les éléments sont de la forme $\frac{P}{Q}$; où P et Q deux polynômes tels que $Q \neq 0$ et s'appellent des fractions rationnelles. Cette ecriture est dite irréductible lorsque $P \wedge Q = 1$.
Toute fraction rationnelle peut s'écrire sous une forme irréductible, il suffit d'y simplifier par le PGCD du numérateur et dénominateur.

1.2 Degré d'une fraction rationnelle.

Définition 1. *Le degré d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est défini à l'aide de la relation :* $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$.

1.3 Pôle d'une fraction rationnelle.

Définition 2. *Soit* $F = \dfrac{P}{Q}$ *écrite sous sa forme irréductible, les pôles de* F *sont exactement les racines de* Q*, les multiplicités de ses racines de* Q *sont appelés aussi multiplicités des pôles associés pour la fraction rationnelle* F*.*

Remarque :
Pour déterminer les pôles d'une fraction rationnelle il faut avant toute autre chose la simplifier et l'écrire sous sa forme irréductible.

2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle.

Définition 3. *La partie entière d'une fraction rationnelle* F *est par définition l'unique polynôme noté* $E(F)$ *vérifiant la propriété :* $\deg(F - E(F)) < 0$.

Remarque :
Si $F = \dfrac{P}{Q}$ la partie entière de F est exactement le quotient de la division euclidienne de P par Q.

2.2 Partie polaire relative à un pôle d'une fraction rationnelle.

Définition 4. *La partie polaire relative à un pôle* a *d'une fraction rationnelle* F *est par définition l'unique fraction rationnelle notée* F_a *vérifiant la propriété suivante :* a *n'est pas un pôle de* $F - F_a$*.*

Remarque :
Si a pôle de multiplicité r dans F, alors la partie polaire relative à a dans F est de la forme : $F_a(X) = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots \dfrac{\lambda_r}{(X-a)^r}$

2.3 Décomposition en éléments simples.

Toute fraction rationnelle sous décompose en éléments simples de façon unique comme somme de sa partie entière et toutes les parties polaires relatives à ses pôles.

3 Remarques utiles.

3.1 Cas d'un unique pôle.

Si $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a)^r}$ avec $\deg(P) < r$ admet un unique pôle a, alors sa décomposition en éléments sipmles est obtenu à l'aide de *la formule de Taylor* à l'ordre $r-1$ appliquée au polynôme P au point a, plus précisément :
$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \dots \dfrac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(X-a)^{r-1} \Longrightarrow F(X) = \dfrac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\dfrac{1}{X-a} + \dots \dfrac{P(a)}{(X-a)^r}$.

3.2 Coéfficient du plus haut degré dans la partie polaire.

Si a est un pôle de F de multiplicité r dans F, alors le coéfficient λ_r de $\dfrac{1}{(X-a)^r}$ dans la partie polaire de F relative à a est obtenu à l'aide de la formule $\lambda_r = \lim\limits_{X \to a} (X-a)^r F(X)$.

3.3 Cas d'un pôle simple.

Si a est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$ (de multiplicité 1), alors la partie polaire de F relative au pôle a est de la forme $F_a(X) = \dfrac{\lambda}{X-a}$ où $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

3.4 Cas d'un pôle double.

Si a est un pôle double de $F = \frac{P}{Q}$ (de multiplicité 2), alors la partie polaire de F relative au pôle a est de la forme :
$F_a(X) = \dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2}$ où $\mu = \dfrac{2P(a)}{Q''(a)}; \lambda = \dfrac{2}{3}\dfrac{3P'(a)Q''(a) - P(a)Q'''(a)}{(Q''(a))^2}$.

3.5 Cas d'un pôle imaginaire d'une fraction rationnelle réelle.

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ (à coéfficients réels) et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ un pôle de F de partie polaire dans F égale à $F_a(X) = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots \dfrac{\lambda_r}{(X-a)^r}$, alors $\overline{a}$ est aussi un pôle de F de même multiplicité que a et dont la partie polaire dans F est exactement : $F_{\overline{a}}(X) = \overline{F_a}(X) = \dfrac{\overline{\lambda_1}}{X-\overline{a}} + \dfrac{\overline{\lambda_2}}{(X-\overline{a})^2} + \dots \dfrac{\overline{\lambda_r}}{(X-\overline{a})^r}$.

3.6 Cas d'une fraction rationnelle paire ou impaire.

Soit F une fraction rationnelle paire ou impaire et a un pôle de F de partie polaire dans F égale à $F_a(X) = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots \dfrac{\lambda_r}{(X-a)^r}$, alors $-a$ est aussi un pôle de F de même multiplicité que a et dont la partie polaire dans F est :

- Si F paire, $F_{-a}(X) = \dfrac{-\lambda_1}{X+a} + \dfrac{\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots \dfrac{(-1)^r\lambda_r}{(X+a)^r}$.
- Si F impaire, $F_{-a}(X) = \dfrac{\lambda_1}{X+a} + \dfrac{-\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots \dfrac{(-1)^{r+1}\lambda_r}{(X+a)^r}$.

3.7 Cas d'une fraction rationnelle de la forme $F = \dfrac{P'}{P}$.

Dans ce cas si $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ sont les racine de P de multiplicité α_i, alors ce sont des pôles simple de F, et la décomposition en élément simple de F est donnée à l'aide de la formule : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dfrac{\lambda_i}{X-a_i}$.

$\boxed{\text{Fin.}}$