CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Géometrie euclidienne du plan et de l'espace*

8 janvier 2009

Blague du jour
Ce service est provisoirement suspendu.

mathématicien du jour ***Ptolémée***
Claudius Ptolemaeus (90-168), communément appelé Ptolémée, était un astronome et astrologue grec qui vécut à Alexandrie (Égypte). Il est également l'un des précurseurs de la géographie. Ptolémée a décrit l'astrolabe inventé probablement par *Hipparque*, dessina aussi la carte du monde en 150, qui couvrait 180 degrés de longitude des Canaries (dans l'océan Atlantique) jusqu'à la Chine, et environ 80 degrés de latitude de l'Arctique aux Indes et loin en Afrique. Ptolémée était bien conscient que ses connaissances ne couvraient qu'un quart du globe. Ptolémée a également écrit les Harmoniques, un traité de musicologie de référence sur la théorie et les principes mathématiques de la musique.Il a aussi découvert une façon de calculer pi en utilisant la base soixante. Enfin, dans Optique, Ptolémée traite des propriétés de la lumière notamment, la réflexion, la réfraction et la couleur. Ce travail est une partie importante de l'histoire de l'optique.

1 Géometrie euclidienne du plan.

1.1 Affixe d'un vecteur

- **Si M est un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.**
- **Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectifs z_A et z_B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $z_B - z_A$.**
- **Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2, on pose**

$$\begin{aligned} \langle z_1, z_2\rangle &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \\ \mathrm{Det}(z_1, z_2) &= \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{aligned} \tag{1}$$

- **Dans ce cas on a la formule suivante :**

$$\overline{z_1} z_2 = \langle z_1, z_2\rangle + i\mathrm{Det}(z_1, z_2) \tag{2}$$

– **En particulier,**

$$|z| = \|\overrightarrow{u}\| \qquad (3)$$

quand z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$.

1.2 Angle orienté

1.2.1 De deux vecteurs

On rappelle que l'angle orienté de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est donné par la formule suivante :

$$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

En particulier l'angle orienté noté $\theta = \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$ de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, d'affixes respectifs z_1 et z_2 est donné par la formule suivante :

$$\theta = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \qquad (4)$$

L'équation ?? devient

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|}\left(\frac{\langle z_1, z_2\rangle}{|z_1|.|z_2|} + i\frac{\mathrm{Det}(z_1, z_2)}{|z_1|.|z_2|}\right)$$

d'où les formules suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}$$

Rappelons les propriétés suivantes :
- **θ est unique modulo 2π.**
- **$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = -\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}$.**
- **$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}} = \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} + \widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}$. Relation de Chasles**
- **$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont proportionnels $\iff \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} \equiv 0 \quad mod(\pi)$.**
- **$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont proportionnels et de même sens $\iff \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} \equiv 0 \quad mod(2\pi)$.**
- **$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont proportionnels et de sens opposés $\iff \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} \equiv \pi \quad mod(2\pi)$.**

1.2.2 De deux droites

C'est l'angle orienté entre deux vecteurs quelconques qui dirigent la droite.

1.3 Mode de repèrage dans $\mathbb{R}^2$.

1.3.1 Coordonées cartesiennes

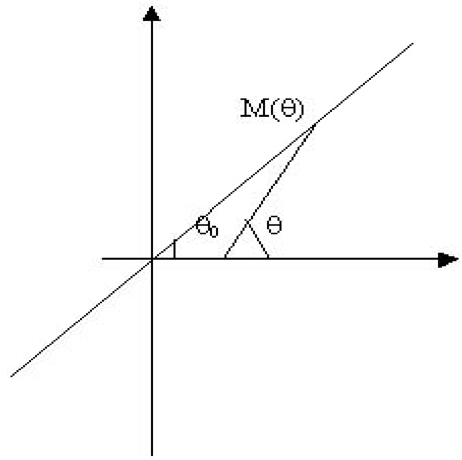
Équation cartésienne d'une droite. **Elle est de la forme $\Delta : ax + by = c$ où $\overrightarrow{\tau} = -b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$ dirige Δ et $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ dirige sa normale, et pour tout point $M(x_0, y_0)$ on a $d(M, \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.**

Équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}(\omega, R)$. **Elle est de la forme $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = R^2$.**

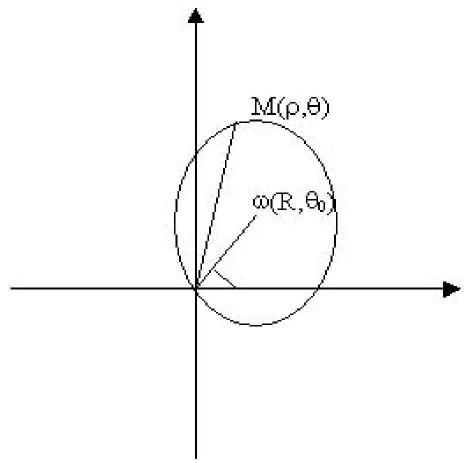
1.3.2 Coordonées polaires

.

Équation polaire d'une droite. Si $\Delta : ax + by = c$ fait un angle θ_0 avec l'axe (ox), alors son equation polaire est de la forme $\rho(\theta) = \dfrac{R}{\sin(\theta - \theta_0)}$ où $R = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Équation polaire d'un cercle $\mathcal{C}(\omega, R)$ passant par l'origine. Elle est de la forme $\rho(\theta) = 2R\cos(\theta - \theta_0)$ où θ_0 l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ avec l'axe (ox).



1.3.3 Paramètrages

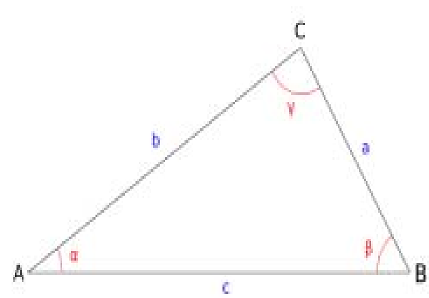
D'une droite passant par un point A et dirigé par un vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$, elle est de la forme : $\begin{cases} x(t) &= x_A + t\alpha \\ y(t) &= y_A + t\beta \end{cases}$

D'un cercle de centre ω et de rayon R, elle est de la forme : $\begin{cases} x(t) &= x_\omega + Re^{it} \\ y(t) &= y_\omega + Re^{it} \end{cases}$

1.4 Relations particulières

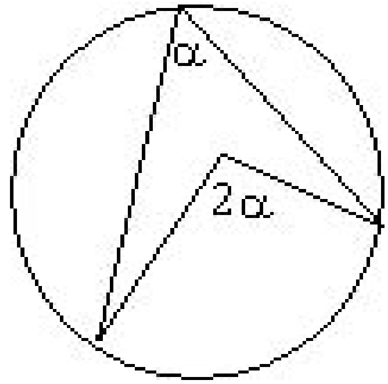
1.4.1 Dans un triangle

- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
- ***Théorème de la mediane* : Si on note par M le milieu de $[B, C]$, alors $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \dfrac{a^2}{2}$.**
- ***Loi des sinus* : $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.**
- **Loi des cosinus (Al-Kashi) :** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



1.4.2 Dans un cercle

- ***Théorème de l'angle au centre*** **: Soit A et B deux point fixes d'un cercle $\mathcal{C}(\omega, R)$. Pour tout point M du même cercle, on a la relation suivante : $\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}} = 2\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}$.**
- ***Théorème de l'arc capable*** **: Soit A et B deux point fixes, l'ensemble des points M pourlesquel l'angle $\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}$ est constant est un arc de cercle d'extremités A et B.**
- ***Cocyclicité*** **: Quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés *si et seulement si* leur birapport $\dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \Big/ \dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$ est un nombre réel**



2 Géomètrie euclidienne de l'espace.

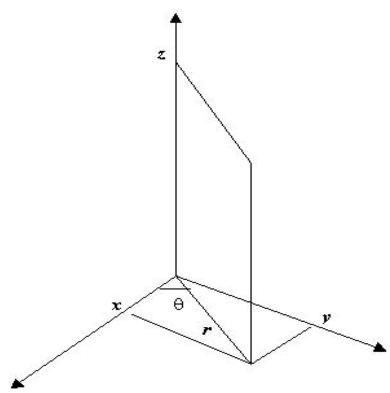
2.1 Généralités

2.1.1 Angle non orienté de deux vecteurs

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il est défini par la relation suivante $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}$ unique modulo π, appelé aussi écart angulaire.

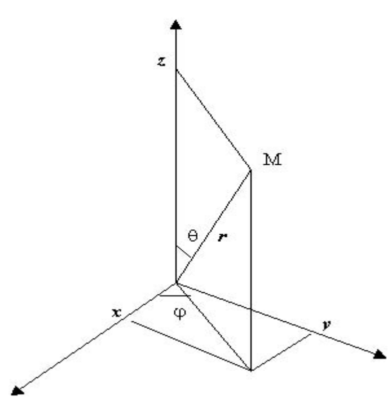
2.1.2 Coordonnés cylindriques.

Pour tout point M de l'espace, elles sont données par les formules suivantes : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & z \end{array}\right.$ **où** $0 \leq \theta \leq 2\pi$**.**



2.1.3 Coordonnés sphèriques.

Pour tout point M de l'espace, elles sont données par les formules suivantes : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\sin\phi\cos\theta \\ y & = & r\sin\phi\sin\theta \\ z & = & r\cos\phi \end{array}\right.$ **où** $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ **et** $0 \leq \phi \leq 2\pi$**.**



2.2 Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, l'unique vecteur noté $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, vérifiant la relation suivante :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} \quad \forall \overrightarrow{w}$$

$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ **s'appelle produit mixte des vecteurs** $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ **et se note** $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Propriétés :

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$.
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **sont proportionnels.**
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.
- $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$ **où** θ **est l'écart angulaire entre les deux vecteurs** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$.
- ***Égalité du double produit vectoriel*** **:** $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$.
- ***Identité de Lagrange*** **:** $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$.
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ **est une b.o.n. directe de l'espace** ***si et seulement si*** $\begin{array}{l} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \end{array}$

2.3 Un peu d'Histoire

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension trois[1]. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Günther Grassmann et William Rowan Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.
En 1843, Hamilton inventa les quaternions qui permettent de définir le produit vectoriel. Indépendamment et à la même période (1844) Grassmann définissait dans « produit géométrique » à partir de considérations géométriques ; mais il ne parvient pas à définir clairement un produit vectoriel. Puis Grassmann lit Hamilton et s'inspire de ses travaux pour publier en 1862 une deuxième version de son traité qui est nettement plus claire. De même, Hamilton a lu les travaux de Grassmann et les a commentés et appréciés. Plus tard Maxwell commença à utiliser la théorie des quaternions pour l'appliquer à la physique. Après Maxwell, Clifford modifia profondément le formalisme de ce qui devenait l'analyse vectorielle. Il s'intéressa aux travaux de Grassmann et Hamilton avec une nette préférence pour le premier. En 1881, Gibbs publia les fondements du produit vectoriel en s'inspirant des travaux déjà réalisés notamment ceux de Clifford et Maxwell. Si les physiciens se sont empressés d'utiliser le formalisme de Gibbs, celui-ci ne fut accepté en mathématiques que bien plus tard après plusieurs modifications.

Fin.
à la prochaine