RÉSUMÉ DE COURS : *Intégration sur un segment.*

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Table des matières

1	Fonctions en escaliers	1
1.1	Subdivision d'un segment	1
1.2	Intégrale d'une fonction en escalier	1
2	Fonctions continues par morceaux	2
2.1	Approximation d'une fonction continue par morceaux à l'aide de fonctions en escaliers	2
2.2	Propriétés de l'intégrale	2
2.3	Cas des fonctions continues	2
3	Primitive d'une fonction continue	2
4	Formules de Taylor	3
5	Calcul approché d'intégrales	3
5.1	Sommes de Riemman	3
5.2	Méthode des trapèzes	3

1 Fonctions en escaliers

1.1 Subdivision d'un segment

Définition 1. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que $x_0 = a, x_n = b$.
On dit que $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si elle existe une subdivision de $[a, b]$, dite adaptée à φ , tel que φ est constante sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extrémités à gauche et à droite.
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier, et $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ , et λ_i la constante prise par φ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ alors la somme
$$\sum_{i=0}^n \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$
 ne dépend pas du choix de σ on l'appelle alors l'intégrale de φ sur $[a, b]$ et on la note par $\int_{[a,b]} \varphi$ ou bien $\int_a^b \varphi(t) dt$

2 Fonctions continues par morceaux

2.1 Approximation d'une fonction continue par morceaux à l'aide de fonctions en escaliers

Définition 3. On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle existe une subdivision de $[a, b]$, dite adaptée à f , tel que f est continue sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extrémités. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

Théorème 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors $\forall \varepsilon > 0$ ils existent φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

2.2 Propriétés de l'intégrale

- Linéaire : $\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$.
- Positif : $f \geq 0 \implies \int_{[a,b]} f \geq 0$.
- Croissant : $f \leq g \implies \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- Relation de CHASLES. $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f$.
- $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- $\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$. Inégalité de la moyenne.

2.3 Cas des fonctions continues

Théorème 2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue positive, alors :
 $\int_{[a,b]} f = 0 \implies f = 0$ sur $[a, b]$.

Théorème 3. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, alors

$$\left(\int_{[a,b]} fg \right) \leq \left(\int_{[a,b]} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Inégalité de Cauchy-Swarz.}$$

Avec égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

3 Primitive d'une fonction continue

Définition 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on appelle primitive de f sur $[a, b]$ toute fonction F de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que $F' = f$.

Théorème 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors l'application F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et tout autre primitive G de f s'obtient à l'aide de la formule $G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$.

Corollaire 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 alors :
 $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ noté souvent $[f]_a^b$.

Corollaire 2. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 alors :
 $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$ Intégration par parties.

Corollaire 3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, en posant le changement de variable $u = \varphi(t)$.

4 Formules de Taylor

On suppose que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} , on a les résultats suivants :

Formule de Taylor avec reste intégral.

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange.

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Formule de Taylor-Young.

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

5 Calcul approché d'intégrales

5.1 Sommes de Riemman

Théorème 5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Intéprétation. En posant $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$, appelée somme

de Riemman, on a alors $R_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$, avec φ en escalier sur $[a, b]$ égale à

$f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ sur chaque intervalle $\left]a + k \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right[$ ainsi on approche $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de celui d'une fonction en escalier qui est somme de surfaces de rectangles.

Remarques.

Le théorème s'écrit encore : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$ ou

encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$.

Le cas le plus pratique est $a = 0, b = 1$, le théorème s'écrit alors :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$, qu'on peut lire ainsi la moyenne de Césaro (arithmétique) converge vers l'intégrale.

5.2 Méthode des trapèzes

Le principe est d'approcher $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de $T_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$ où φ affine par morceaux sur $[a, b]$ qui coincide (interpolle) avec aux extrémités $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. On a alors le résultat suivant :

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , alors $\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f)$ où

$T_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$ et $x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \forall 0 \leq k \leq n$ avec

$M_2(f) = \sup_{[a,b]} |f''|$.

Fin.