Résumé de cours : *Limites.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *mamouni.myismail@gmail.com*

Limite finie et continuité en un point.

On dit qu'un réel a est adhérant à I *si et seulement si* $a \in I$ ou bien a est l'une des extrémités de I.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), l \in \mathbb{R}$, on dit que l est la limite de f en a *si et seulement si* : $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in I : \quad |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$.

On écrit alors $\lim\limits_a f = l$ et on dira que f est continue au point a lorsque $a \in I$ et $\lim\limits_a f = f(a)$.

Propriétés.

Soit $(f,g,h) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^3$ qui admettent des limites finies en a adhérant à I, alors :

- $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g, \quad \lim\limits_a (fg) = \lim\limits_a f \lim\limits_a g$.
  En particulier la somme et le produit de deux fonctions continues en un point le sont aussi.
- $\lim\limits_a |f| = |\lim\limits_a f|$.
  En particulier la valeur absolue d'une fonction continue en un point est aussi continue.
- Si $\lim\limits_a f \neq 0$ alors $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\lim\limits_a f}$.
  En particulier le quotient d'une fonction continue en un point où elle ne s'annule pas est aussi continue.
- Si $\lim\limits_a f > 0$ alors $f > 0$ sur un voisinage de a de la forme $]a-\eta, a+\eta[$.
  En particulier si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors f garde un signe constant, celui de $f(a)$, sur un voisinage de a de la forme $]a-\eta, a+\eta[$.
- Si $g \leq f \leq h$ sur un voisinage de a de la forme $]a-\eta, a+\eta[$ et si $\lim\limits_a g = \lim\limits_a h = l$, alors $\lim\limits_a f = a$.

Limite infinie et à l'infini.

- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_a f = +\infty \Longleftrightarrow \forall\, A > 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) > A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_a f = -\infty \Longleftrightarrow \forall\, A < 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) < A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = l \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad x > B \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = l \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists B < 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad x < B \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \Longleftrightarrow \forall\, A > 0 \quad \exists B > 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad x > B \Longrightarrow f(x) > A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty \Longleftrightarrow \forall\, A > 0 \quad \exists B > 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad x > B \Longrightarrow f(x) < A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty \Longleftrightarrow \forall\, A > 0 \quad \exists B < 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad x < B \Longrightarrow f(x) > A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty \Longleftrightarrow \forall\, A < 0 \quad \exists B < 0$ tel que $\forall\, x \in I \quad x < B \Longrightarrow f(x) < A$.

Limites à gauche et à droite.

1) On dira que f admet l comme limite à droite au point a quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in I$ on a $0 \leq x-a < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$, on écrit $\lim\limits_{a^+} f = l$.

2) On dira que f admet l comme limite à gauche au point a quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in I$ on a

$0 \leq a - x < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$, on écrit $\lim\limits_{a^-} f = l$.

3) On dira que f admet $+\infty$ comme limite à droite au point a quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall A > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$ on a $0 \leq x - a < \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$, on écrit $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.

4) On dira que f admet $+\infty$ comme limite à gauche au point a quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall A > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$ on a $0 \leq a - x < \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$, on écrit $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.

5) On dira que f admet $-\infty$ comme limite à droite au point a quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall A < 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$ on a $0 \leq x - a < \eta \Longrightarrow f(x) \leq A$, on écrit $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

6) On dira que f admet $-\infty$ comme limite à gauche au point a quand elle vérifie la propriété suivante : $\forall A < 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$ on a $0 \leq a - x < \eta \Longrightarrow f(x) \leq A$, on écrit $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$.

Remarques.

1) $\lim\limits_{a} f = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = l$.

2) f est continue en un point $a \Longleftrightarrow$ elle est continue à gauche et à droite au point a.

Fonctions continues sur un intervalle.

On dit qu'une fonction est continue sur I *si et seulement si* elle est continue en tout point de I. L'ensembles des fonctions continues sur I se note $\mathcal{C}(I)$.

Remarque.

La somme et le produit de deux fonctions continues sur I sont aussi continues sur I.

Opérations sur les limites

	Opérations possibles	Formes indétérminées
Somme	$l + \infty = \infty \quad \infty + \infty = \infty$	$\infty - \infty$
Produit	$l \times +\infty = +\infty \quad$ si $l > 0$ $l \times +\infty = -\infty \quad$ si $l < 0$ $+\infty \times +\infty = +\infty \quad +\infty \times -\infty = -\infty$	$0 \times \infty$
Rapport	$\dfrac{l}{\infty} = 0 \quad$ si $l \neq 0$ $\dfrac{\infty}{l} = \infty \quad$ si $l \neq 0$	$\dfrac{\infty}{\infty}, \quad \dfrac{\infty}{0}, \quad \dfrac{l}{0}$

Fin.