CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Matrices et applications linéaires.*

7 juin 2009

Blague du jour :
Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?
- Le Portugais examine la peinture
- L'Americain examine la longueur
- Le Suisse examine le coffre
- Le Chinois examine tout
- Le Belge examine rien

Personnalité du jour ***Cholesky***
André-Louis Cholesky (1875-1918) était un mathématicien et officier polytechnicien français. Il effectue sa carrière dans les services géographiques et topographiques de l'armée. Il est mort de ses blessures à la fin de la Première Guerre mondiale.
On lui doit une méthode célèbre pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, en décomposant une matrcie symétrique définie positive M sous la forme $M = L^tL$, où L est une matrice triangulaire inférieure. Elle est utilisée en chimie quantique pour accélérer les calculs.

Définition 1 . Matrice, du mot latin matrix (matricis), lui-même dérivé de mater, qui signifie « mère » est un élément qui fournit un appui ou une structure, et qui sert à entourer, à reproduire ou à construire.

Dans tout ce résumé $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Matrices en tant qu'applications linéaires.

Remarque 1 . Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$M : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$$

est linéaire. Ainsi toute matrice peut être vue comme une apllication linéaire, avec :

1) $X \in \ker M \Longleftrightarrow X \in \mathbb{K}^P$ **et** $MX = 0$.
2) $Y \in$ **Im** $M \Longleftrightarrow Y \in \mathbb{K}^n$ **et** $\exists X \in \mathbb{K}^p$ **tel que** $Y = MX$.
3) **rg**$(M) + \dim\ker M = p$ **(nombre de colonnes de** M**).**
   Où rg$(M) = \dim$ **Im** $M =$ **rgVect(colonnes de** $)M$.

Proposition 1 . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : M est inversible $\iff \ker M = \{0\}$
$\iff rg(M) = n$

Définition 2 . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) **On dit que λ est une valeur propre de M si et seulement si $\exists X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$.**
2) **X s'appelle vecteur propre de M associé à λ.**
3) **$E_\lambda = \ker(M - \lambda I_n)$ s'appelle le sous-espace propre de M associé à λ.**
4) **On dira que M est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formée uniquement par des vecteurs propres de M.**

Proposition 2 . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ est une valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I_n$ est non inversible.
En particulier M est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de M.

Théorème 1 . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors M est diagonalisable si et seulement si elles existent deux matrices P inversible et D diagonale telles que :

$$M = PDP^{-1} \quad \textbf{On dit que M et P sont semblables.}$$

où les coéfficients diagonaux de D sont formés par les valeurs propres de M et les colonnes de P formées par les vecteurs propres de M écrites dans P dans le même que celui dans lequel sont écrits les valeurs propres pour lesquelles ils sont associés.

Remarque 2 . Toute matrice carré symétrique est diagonalisable, avec $P^{-1} = {}^tP$.

Définition 3 . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$. On pose alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \quad \textbf{avec } M^0 = I_n$$

On dira que P est un polynôme annulateur de M quand $P(M) = 0$.

Proposition 3 . Toute matrice carré qui admet un polynôme annulateur à racines simples est diagonalisable

Proposition 4 . Toute matrice carré dont le nombre de valeurs propres est égal à celui des ses lignes (ou colonnes) est diagonalisable

2 Matrice d'une application linéaire.

Définition 4 .
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives n et p, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ bases respectives de E et F et $u : E \to F$ linéaire, la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice de type (p, n) notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ dont la j–ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e'_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Propriétés.

- **Si** $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ **alors** $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}e'_i$.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u+\lambda v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \lambda\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)$.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = 0$ **si et seulement si** $u = 0$.
  En particulier deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs matrices associées dans les mêmes bases sont égales.
- **Ainsi on définit un isomorphisme entre**

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M}: & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$$

- **Soient** E, F **des espaces vectoriels de bases respectives** $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ **et** $E \stackrel{u}{\to} F$ **une application linéaire. Soit** $x \in E$, **et** $[x]_{\mathcal{B}_1}$ **la matrice colonne formée par les coordonnés de** x **dans** $\mathcal{B}_1$ **et** $[u(x)]_{\mathcal{B}_2}$ **celle formée par les coordonnés de** $y = u(x)$ **dans** $\mathcal{B}_2$ **alors l'équation linéaire** $y = u(x)$ **s'écrit sous la forme matricielle**

$$[u(x)]_{\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)[x]_{\mathcal{B}_1}$$

- **Si** E, F, G **des espaces vectoriels de bases respectives** $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ **et** $E \stackrel{u}{\to} F \stackrel{v}{\to} G$ **applications linéaires alors :**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v\circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$

- **Si** E, F **des espaces vectoriels de bases respectives** $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ **et** $E \stackrel{u}{\to} F$ **application linéaire alors :** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ **est inversible si et seulement si** u **est un isomorphisme et dans ce cas**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

3 Matrice de passage entre deux bases.

3.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 5 . Soit $\mathcal{B}$ **une base d'un espace vectoriel de dimension** n **et** $\mathcal{C}$ **une famille de** p **vecteurs de** E, **la matrice de la famille** $\mathcal{C}$ **dans la base** $\mathcal{B}$ **est la matrice à** n **lignes et** p **colonnes notée** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ **dont les colonnes sont formées par les coordonnés des éléments de** $\mathcal{C}$ **dans** $\mathcal{B}$.

Proposition 5 . Avec les notations de la définition précèdente on a :

$$\mathbf{rg}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = \dim \mathbf{Vect}(\mathcal{C})$$

En particulier $\mathcal{C}$ **est libre si et seulement si** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ **est inversible.**

3.2 Matrice de passage entre deux bases

Définition 6 . Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ **deux base d'un espace vectoriel de dimension** n, **la matrice de passage de** $\mathcal{B}_1$ **vers** $\mathcal{B}_2$ **est la la matrice carrée d'ordre** n **notée** $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$ **définie par :**

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Propriétés.
Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ **deux bases d'un espace vectoriel ,**E **de dimension** n, **on a les résultats suivants :**
- $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id_E)$
- **Soit** $x \in E$, $[x]_{\mathcal{B}_1}$ **la matrice colonne formée par les coordonnés de** x **dans** $\mathcal{B}_1$ **et** $[x]_{\mathcal{B}_2}$ **celle formée par ses coordonnés dans** $\mathcal{B}_2$ **alors :**

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} \times [x]_{\mathcal{B}_2}$$

– $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ **deux bases d'un espace vectoriel** $,F$ **de dimension** p **et** $u : E \to F$ **linéaire, alors**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}'_1} \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(u) \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

On dit que les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(u)$ **et** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(u)$ **sont équivalentes.**

– **Soit** u **un endomorphisme de** E**, alors**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u) \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

On dit que les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$ **et** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ **sont semblables.**

Fin
à la prochaine