Résumé de cours : *Matrices*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Table des matières

1 Généralités. **1**

1.1 Opérations sur les matrices. 1

1.2 Matrices carrées d'ordre n particulières. 2

1.3 Transposée d'une matrice. 2

2 Matrices et applications linéaires. **3**

2.1 Matrices en tant qu'applicaions linéaires. 3

2.2 Matrices d'une application linéaire. 3

2.3 Matrices de passage entre deux bases. 4

3 Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrices. **4**

3.1 Intéprétation. 4

3.2 Calcul du rang d'une matrice. 4

3.3 Test d'inversibilité d'une matrice et calcul de l'inverse. 4

3.4 Déterminer une base du noyau et de l'image. 4

1 Généralités.

1.1 Opérations sur les matrices.

Définition 1. *Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ déclarée sous forme d'un tableau à double entrée où i designe l'indice des lignes et j celui des colonnes. On écrit alors :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, (on dit aussi de type (n,p)) se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On définit sur les matrices les lois suivantes :

Somme.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ toutes les deux de type (n,p), on pose :

$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$

Multiplication par une constante.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$

Muni de ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension np.

Produit.

Si $A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ de type (n,p) et $B=(b_{i,j})_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq q}$ de type (p,q), alors $AB=(c_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq q}$ est la matrice de type (n,q) définie à l'aide de la relation suivante :

$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

Ainsi le coéfficient $c_{i,j}$ de AB à la i–ème ligne et j–ème colonne s'obtient en faisant le "produit scalaire" de la i–ème ligne de A avec j–ème colonne de B.

Remarque Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Propriété.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, (on dit aussi carées d'ordre n) est stable par le produit matriciel, c'est une algèbre de dimension n^2.

1.2 Matrices carrées d'ordre n particulières.

Matrice identité.

C'est la matrice notée I_n définie par : $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&&0\\0&\dots&0&1\end{pmatrix}$, c'est l'élément neutre pour le produit matriciel.

Matrices diagonales.

Ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&&0\\0&\dots&0&\lambda_1\end{pmatrix}$,
on les note $A=Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.
Si $A=Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n), B=Diag(\mu_1,\dots,\mu_n)$ et $\alpha\in\mathbb{K}$ alors :
$A+\alpha B=Diag(\lambda_1+\alpha\mu_1,\dots,\lambda_n+\alpha\mu_n),\quad AB=Diag(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)$ et en particulier :
$A^p=Diag(\lambda_1^p,\dots,\lambda_n^p)$. Ainsi les matrices diagonales forment une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.

Matrices triangulaires supérieures.

Ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\dots&a_{1,n}\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&&\\0&\dots&0&a_{n,n}\end{pmatrix}$
La somme, le produit et la multilications par une constante de matrices triangulaires supérieures est aussi triangulaire supérieure. On obtient alors une sous–algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Matrices triangulaires inférieures.

Ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix}a_{1,1}&0&\dots&0\\a_{2,1}&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&&0\\a_{n,1}&\dots&&a_{n,n}\end{pmatrix}$, elles forment aussi une sous–algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Matrices inversibles.
Une matrice carrée $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible *si et seulement si* il existe $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB=BA=I_n$, dans ce cas B est unique, s'appelle l'inverse de A et se note A^{-1}. L'ensemble des matrices inversibles noté $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour le produit matriciel, on l'appelle le groupe linéaire d'ordre n, en particulier si A et B sont inversibles alors A^{-1} et AB sont inversibles avec :

$$(A^{-1})^{-1}=A,\quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Une matrice $Diag(\lambda_1\dots,\lambda_n)$ est inversibles *si et seulement si* tous ses coéfficients λ_i sont tous non nuls et dans ce cas

$$Diag(\lambda_1\dots,\lambda_n)^{-1}=Diag(\frac{1}{\lambda_1}\dots,\frac{1}{\lambda_n})$$

1.3 Transposée d'une matrice.

Définition 2. . *Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A, la matrice notée ${}^tA$ dont les lignes sont les colonnes de A.*

$${}^tA=(a_{j,i})_{1\leq i,j\leq n}$$

Propriétés.
Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \lambda\in\mathbb{K}$, on a les résultats suivants :

- ${}^t(A+\lambda B)={}^tA+\lambda{}^tB$.
- ${}^t({}^tA)=A$.
- ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$.
- Si A est inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible, avec $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$.

Matrices symetriques.
Ce sont les matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^tA=A$, elles forment un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ dont la dimension est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Matrices antisymetriques.
Ce sont les matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^tA=-A$, elles forment un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ dont la dimension est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Théoréme 1. .
Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique, autrement dit :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

2 Matrices et applications linéaires.

2.1 Matrices en tant qu'applicaions linéaires.

Soit $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application, $M:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n\\ X & \longmapsto & MX\end{array}$ est linéaire, ainsi toute matrice peut être vue comme une apllication linéaire, on pourra en particulier parler de son image et son noyau. En particulier la formule du rang sur une matrice $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit :
$p=rg(M)+\dim\ker M$.

Propriété : Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{aligned}M \text{ est inversible} &\iff \ker M=\{0\}\\ &\iff rg(M)=n\end{aligned}$$

2.2 Matrices d'une application linéaire.

Définition 3. .
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives n et p, $\mathcal{B}=(e_i)_{1\le i\le n}$ et $\mathcal{B}'=(e'_i)_{1\le i\le p}$ bases respectives de E et F et $u:E\to F$ linéaire, la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice de type (p,n) notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ dont la j–ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e'_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Dans le cas où $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Propriétés.

- Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)=(a_{i,j})_{1\le i\le p,1\le j\le n}$ alors $u(e_j)=\sum\limits_{i=1}^{p}a_{i,j}e'_i$.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u+\lambda v)=\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)+\lambda\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)$.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)=0$ *si et seulement si* $u=0$. En particulier deux applications linéaires sont égales *si et seulement si* leurs matrices associées dans les mêmes bases sont égales.
- Ainsi on définit un isomorphisme entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- Soient E,F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ et $E\xrightarrow{u}F$ une application linéaire. Soit $x\in E$, et $[x]_{\mathcal{B}_1}$ la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $[u(x)]_{\mathcal{B}_2}$ celle formée par les coordonnés de $y=u(x)$ dans $\mathcal{B}_2$ alors l'équation linéaire $y=u(x)$ s'écrit sous la forme matricielle

$$[u(x)]_{\mathcal{B}_2}=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)[x]_{\mathcal{B}_1}$$

- Si E,F,G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3$ et $E\xrightarrow{u}F\xrightarrow{v}G$ applications linéaires alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v\circ u)=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v)\times\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$

- Si E,F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ et $E\xrightarrow{u}F$ application linéaire alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible *si et seulement si* u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)^{-1}=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

2.3 Matrices de passage entre deux bases.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{C}$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice à n lignes et p colonnes notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ dont les colonnes sont formées par les coordonnés des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Matrice de passage entre deux bases.
Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux base d'un espace vectoriel de dimension n, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Propriétés.
Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel ,E de dimension n, on a les résultats suivants :

- $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E)$
- Soit $x \in E$, $[x]_{\mathcal{B}_1}$ la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $[x]_{\mathcal{B}_2}$ celle formée par ses coordonnés dans $\mathcal{B}_2$ alors :

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \times [x]_{\mathcal{B}_2}$$

- $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases d'un espace vectoriel ,F de dimension p et $u : E \to F$ linéaire, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}'_1} \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u) \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

  On dit que les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u)$ sont équivalentes.
- Soit u un endomorphisme de E, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u) \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

  On dit que les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ sont semblables.

3 Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrices.

3.1 Intépprétation.

- Toute opération sur les lignes d'une matrice se traduit par une multiplication à gauche par une matrice inversible.
- Toute opération sur les colonnes d'une matrice se traduit par une multiplication à droite par une matrice inversible.

3.2 Calcul du rang d'une matrice.

Principe.
Faire des opérations sur les lignes et colonnes de la matrice jusqu'à trouver une matrice de type $J_r = (a_{i,j})$ tel que $a_{i,j} \begin{array}{ll} = 1 & \text{si } i = j \leq r \\ = 0 & \text{dans les autres cas} \end{array}$

3.3 Test d'inversibilité d'une matrice et calcul de l'inverse.

Rappel.
Une matrice carré d'ordre n est inversible *si et seulement si* son rang est égal à n.

Principe.
On effectue des opérations soit sur les lignes soit sur les colonnes, le long de tout le procédé sur la matrice et simultanément sur l'identité en deux blocs jusqu'à ce que le 1èr bloc donne l'identité, alors dans le 2ème bloc on va retouver l'inverse de la matrice en question.

3.4 Déterminer une base du noyau et de l'image.

Principe.
On effectue des opérations seulement sur les colonnes, le long de tout le procédé sur la matrice et simultanément sur l'identité en deux blocs jusqu'à ce que le 1èr bloc donne la matrice J_r, alors dans le 2ème bloc les $p-r$ dérnières colonnes forment une base du noyau et les r colonnes restantes de la matrices initiales forment une base de l'image.

Fin.