Résumé de cours : *Polynômes*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Dans tout le résumé $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

Définition 1. *Un polynôme à coéfficient dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une suite (a_k) d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Cette suite est alors notée $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. L'ensemble des polynômes se note $\mathbb{K}[X]$, où X s'appelle l'indéterminée.*

Sur $\mathbb{K}[X]$ on définit les lois suivantes, si $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0, Q(X) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_0, \lambda \in \mathbb{K}$, on pose alors :

$$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)X^k$$

$$(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$$

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ tel que : } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Avec la généralisation $a_k = 0 \quad \forall k \geq n+1, b_k = 0 \quad \forall k \geq m+1$.
$\mathbb{K}[X]$ est stable pour ces lois, on dit alors que c'est une algèbre.

2 Degré d'un polynôme.

Définition 2. *Soit P un polynôme non nul, on appelle degré de P, le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note* $\deg P$.
Ainsi $\deg P = n \Longleftrightarrow P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ *avec* $a_n \neq 0$, a_n *s'appelle coefficient dominant de P et se note* $\mathrm{co}(P)$. *Par convention* $\deg 0 = -\infty$.

Remarque.

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \Longleftrightarrow \deg P \leq n$$

Théoréme 1.

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Avec égalité dans le cas où $\deg P \neq \deg Q$ *ou bien* $\deg P = \deg Q$ *mais* $\deg P + \deg \neq 0$.

Théoréme 2.

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

En particulier si λ, constante non nulle alors :

$$\deg \lambda P = \deg P$$

Remarque.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs à n, on a $\mathbb{K}_n[X]$ est stable pour la somme et la multiplication par une constante, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En particulier $\mathbb{K}_0[X] = K$.

3 Division dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 3. *Soit A, B deux polynômes non nuls, on dit que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $A = BQ$.*

Remarque.
Si B divise A, alors $\deg B \leq \deg A$, en particulier un polynôme ne peut pas diviser un autre polynôme de degré inférieur strictement.

Vocabulaire.

- Deux polynômes P, Q sont dits associés *si et seulement si* $\exists \lambda \neq 0$ tel que : $P = \lambda Q$.
- Un polynôme est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ *si et seulement si* ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes ou ses polynômes associés.

Remarque.
Deux polynômes P et Q sont associés *si et seulement si* P divise Q avec $\deg P = \deg Q$. En particulier tout polynôme de degré 1 est irreductible.

Théoréme 3. $\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $B \neq 0$ $\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $A = BQ + R$ *avec* $\deg R < \deg Q$. *Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.*

Remarque.
B divise A *si et seulement si* le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Algorithme d'Euclide.
Soit A, B deux polynôme non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu'à arriver à un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de A et B de degré minimal, ce reste un fois normalisé, s'appelle le PGCD de A et B et se note $A \wedge B$.

Propriétés.
le PGCD est commutatif, associatif et ne change pas si l'on multiplie l'un des polynômes par une constante.

Vocabulaire.
Deux polynômes sont dits premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Proposition 1. *Soient P et Q deux polynômes non nuls, et D leurs PGCD, alors*

$$P = DP', Q = DQ' \text{ avec } Q \wedge Q' = 1$$

Remarque.
Si P polynôme irréductible et Q polynôme quelconque, alors $P \wedge Q = 1$ ou P, en particulier deux polynômes irreductibles distincts sont toujours premiers entre eux.

Théoréme 4. *Théorème de Bezout.*
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $A \wedge B = 1$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que : } AU + BV = 1$$

Théoréme 5. *Théorème de Gauss.*
Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]$ tel que : A divise BC et $A \wedge B = 1$ alors A divise C.

Conséquences.

- $A \wedge B = A \wedge C = 1 \Longrightarrow A \wedge BC = 1$.
- $A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow A \wedge B^\beta = 1 \Longleftrightarrow A^\alpha \wedge B^\beta = 1$.
- Si A et B divisent C et sont premiers entre eux, alors AB divise C.

4 Racines d'un polynôme :

Définition 4. *A chaque polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on associé la fonction réelle :*

$$\begin{aligned} \widehat{P}(x) : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n + \ldots + a_0 \end{aligned}$$

appellée fonction polynômiale de P et on dit que $\alpha \in K$ est une racine de P si et seulement si $\widehat{P}(\alpha) = 0$, dans la suite on notera $P(\alpha) = 0$ au lieu de $\widehat{P}(\alpha)$.

Théoréme 6. *Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in K$, alors α est une racine de P si et seulement si $X-a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.*

Conséquences.

- Un polynôme irreductible dans $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 2 n'admet jamais de racine dans $\mathbb{K}$.
- Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au maximun n racines.
- Tout polynôme qui admet un nombre de racines supérieur strictement à son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

lemme 1.

Tout polynôme, non constant admet au moins un facteur (diviseur) irréductible.

Théoréme 7. *Tout polynôme, non constant, P se décompse de façon unique en facteurs irreductibles sous la forme*

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et P_i des polynômes irreductibles unitaires.

Théoréme 8. ***Théorème de D'Alembert***
Tout polynôme, non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquences.

- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
  En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme
  $$P(X) = \lambda(X-z_1)^{\alpha_1} \dots (X-z_r)^{\alpha_r}$$
  où les z_i sont les racines de P.
- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ou ceux de degré 2 à descriminant strictement négatif.
  En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme
  $$P(X) = \prod_{i=1}^{r} \lambda(X-x_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{p} (X^2 - 2\Re e(z_i) + |z_i|^2)^{\beta_i}$$
  où les x_i sont les racines réelles de P et z_i ceux complexes non réelles.
  Il faut noter que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ racine de P, alors $\overline{z}$ aussi racine de P.

5 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 5. *Soit $P(X) = a_nX^n + \ldots + a_0$, on appelle polynôme dérivé de P, le polynôme noté P' défini par $P'(X) = na_nX^{n-1} + \ldots + a_1$.*

Propriétés.

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P' = n-1$ et $\mathrm{co}(P') = n\mathrm{co}(P)$. En particulier la dérivée d'un polynôme est nul si et seulement si il est constant.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(P+\lambda Q)' = P' + \lambda Q'$, en conséquence l'application : $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$ est linéaire.

Définition 6. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence la dérivée k–ème de P à l'aide de la formule $P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$. Et on convient d'écrire $P^{(0)} = P$.*

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n-k$ et $\mathrm{co}P^{(k)} = A_n^k \mathrm{co}P$, avec la convention $\mathcal{A}_n^k = 0$ si $k > n$.
  En particulier la dérivée k–ème d'un polynôme est nul *si et seulement si* ce polynôme est de degré inférieur à $k-1$.
- Si $\deg = n$ alors $P^{(n)} = n!\mathrm{co}P$.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(P+\lambda Q)^{(k)} = P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}$, en conséquence l'application : $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-k}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P^{(k)}(X) \end{array}$ est linéaire.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ Formule de Leibniz}$$

Définition 7. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une racine $a \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $P(a) = \dots P^{(n-1)}(a) = 0$ mais $P^{(n)}(a) \neq 0$. Et convient de dire que a est multiplicité nulle dans P lorsqu'elle n'est pas une racine de P.*

Théoréme 9. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{K}$ on a : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.*

Théoréme 10. *Soit $P \in \mathbb{K}[X], n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *a est une racine de P de multiplicité n*
- *$(X-a)^n$ divise $P, (X-a)^{n+1}$ ne divise pas P.*
- *$\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = (X-a)^n$ avec $Q(a) \neq 0$.*

6 Polynômes scindés.

Définition 8. *On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si et seulement si toutes ses racines sont dans $\mathbb{K}$.*

Remarques.
- Tout polynôme non constant est scindé dans $\mathbb{C}$.
- Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* toutes ses racines sont réelles.

Théoréme 11. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé dans $\mathbb{K}$, alors*

$$P(X) = \mathrm{co}(P) \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)^{\alpha_k}$$

où z_k sont les racines de P et α_k leurs multiplictés respectives.
En particulier $\deg P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Formules de Newton entre racines et coefficients d'un polynôme scindé :
Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ un polynôme scindé de degré n, et $z_1, \dots, z_n$ ses racines distincts ou non, on a les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum \prod_{i<j} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \displaystyle\sum \prod_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array}}$$

Fin.