

I. Partie entière.

Axiome d'Archimède.

$\forall x \in \mathbb{R}_+; \exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq x$.

Définition.

$\forall x \in \mathbb{R}_+; \exists ! p \in \mathbb{N}$ tel que : $p \leq x \leq p + 1$, cet entier, p s'appelle partie entière de x et se note $[x]$ ou $E(x)$.

Propriétés.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : E(x) = n \iff n \leq x < n + 1$.
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : E(x) = n \iff x - 1 < n \leq x$.
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, E(n) = n$.
- 4) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : E(x + n) = E(x) + n$.
- 5) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.

II. Ordre dans \mathbb{R} .

Majorant.

Un nombre réel M est dit majorant d'une partie A de \mathbb{R} si et seulement si $\forall x \in A$, on a : $x \leq M$, par exemple 1 est un majorant de $[-1, \frac{1}{2}]$.

Borne supérieure.

La borne supérieure d'une partie A de \mathbb{R} est le plus petit de ses majorants, on la note $\sup A$.

Attention.

La borne supérieure d'une partie de \mathbb{R} n'existe pas toujours, toute fois on a le résultat suivant :

Axiome de la borne supérieure.

Toute partie de \mathbb{R} , non vide et majorée admet une borne supérieure.

Propriété caractéristique de la borne supérieure.

Soit A une partie de \mathbb{R} et $l \in \mathbb{R}$, on a le résultat suivant :

$$\sup(A) = l \iff \begin{aligned} &x \leq l, \quad \forall x \in A \\ &\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que : } l - \varepsilon < x_\varepsilon \end{aligned}$$

Maximum.

Le maximum, ou plus grand élément d'une partie A de \mathbb{R} , est un majorant de A qui appartient à A . Ce maximum n'existe pas toujours.

Attention.

- 1) Un majorant d'une partie n'est pas toujours sa borne supérieure.
- 2) La borne supérieure d'une partie n'est pas toujours son maximum.

Remarque.

D'une façon pareille on peut définir les notions de minorants, borne inférieure et minimum d'une partie de \mathbb{R} .

III. Partie dense dans \mathbb{R} .

Définition.

Une partie A de \mathbb{R} est dite dense dans \mathbb{R} si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x < y, \quad \exists a \in A \text{ vérifiant } x < a < y$$

Théorème.

\mathbb{Q} et $\overline{\mathbb{Q}}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Remarques.

- Entre deux nombres réels, on peut trouver une infinité de rationnels (respectivement d'irrationnels).
- Pour tout nombre réel, x , on peut construire une suite croissante et une autre décroissante de rationnels (respectivement d'irrationnels), convergentes toutes les deux vers x .

Fin.