بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

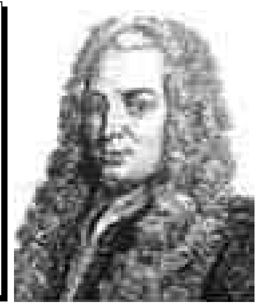
# Résumé de cours: *Sous espaces vectoriels*

**Sup-MPSI, CPGE G.S. High Tech, Rabat**

**21 novembre 2008**

**Citations du jour :**
**• Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. Bonaparte Napoléon.**
**• Selon que notre idée est plus ou moins obscure**
**L'expression la suit, ou moins nette ou plus pure.**
**Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement**
**Et les mots pour le dire arrivent aisément** **Boileau**

**Mathématicien du jour :** **Cramer**
**Gabriel Cramer (1704-1752), était un mathématicien suisse et membre de la Royal Society. Le travail par lequel il est le mieux connu est son traité sur les courbes algébriques publié en 1750 ; il contient la plus ancienne démonstration qu'une courbe du $n$-ième degré est déterminée par $\dfrac{n(n+3)}{2}$ points. Issu d'une famille académique, il obtena son doctorat à l'age de 18ans. Il était trés ami avec les Bernouilli, et publia leurs travaux aprés leurs morts.**



# 1 Calcul matriciel

## 1.1 Généralités.

**Définition 1** **Une matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une suite $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ déclarée sous forme d'un tableau à double entrée où $i$ designe l'indice des lignes et $j$ celui des colonnes. On écrit alors :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

**L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, (on dit aussi de type $(n,p)$) se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.**

### 1.2 Opérations sur les matrices.

**On définit sur les matrices les lois suivantes :**
**Somme.**
**Si** $A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ **et** $B=(b_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ **toutes les deux de type** $(n,p)$**, on pose :**
$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$
**Multiplication par une constante.**
**Si** $A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ **et** $\lambda\in\mathbb{R}$**, on pose :**
$\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$
**Muni de ces deux lois,** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ **est un** $\mathbb{R}$**-ev de dimension** $np$**.**
**Produit.**
**Si** $A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ **de type** $(n,p)$ **et** $B=(b_{i,j})_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq q}$ **de type** $(p,q)$**, alors** $AB=(c_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq q}$ **est la matrice de type** $(n,q)$ **définie à l'aide de la relation suivante :**
$c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$
**Ainsi le coéfficient** $c_{i,j}$ **de** $AB$ **à la** $i$**–ème ligne et** $j$**–ème colonne s'obtient en faisant le "produit scalaire" de la** $i$**–ème ligne de** $A$ **avec** $j$**–ème colonne de** $B$**.**
**Remarque Le produit matriciel n'est pas commutatif.**
**Propriété.**
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **l'ensemble des matrices carrées à** $n$ **lignes et** $n$ **colonnes, (on dit aussi carées d'ordre** $n$**) est stable par le produit matriciel.**

### 1.3 Matrices carrées d'ordre $n$ particulières.

**Matrice identité.**
**C'est la matrice notée** $I_n$ **définie par :** $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&&0\\0&\dots&0&1\end{pmatrix}$**, c'est l'élément neutre pour le produit matriciel.**
**Matrices diagonales.**
**Ce sont les matrices de la forme** $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&&0\\0&\dots&0&\lambda_1\end{pmatrix}$**,**
**on les note** $A=Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$**.**
**Si** $A=Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n),B=Diag(\mu_1,\dots,\mu_n)$ **et** $\alpha\in\mathbb{R}$ **alors :**
$A+\alpha B=Diag(\lambda_1+\alpha\mu_1,\dots,\lambda_n+\alpha\mu_n),\quad AB=Diag(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)$ **et en particulier :**
$A^p=Diag(\lambda_1^p,\dots,\lambda_n^p)$**.**
**Matrices triangulaires supérieures.**
**Ce sont les matrices de la forme** $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\dots&a_{1,n}\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&&\\0&\dots&0&a_{n,n}\end{pmatrix}$
**La somme, le produit et la multilications par une constante de matrices triangulaires supérieures est aussi triangulaire supérieure.**
**Matrices triangulaires inférieures.**
**Ce sont les matrices de la forme** $\begin{pmatrix}a_{1,1}&0&\dots&0\\a_{2,1}&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&&0\\a_{n,1}&\dots&&a_{n,n}\end{pmatrix}$
**Matrices inversibles.**
**Une matrice carrée** $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **est dite inversible** ***si et seulement si*** **il existe** $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **tel que** $AB=$

**$BA = I_n$, dans ce cas $B$ est unique, s'appelle l'inverse de $A$ et se note $A^{-1}$. L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{G}l_n($(.**

**Si $A$ et $B$ sont inversibles alors $A^{-1}$ et $AB$ sont inversibles avec :**

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Une matrice $Diag(\lambda_1 \dots, \lambda_n)$ est inversibles *si et seulement si* tous ses coéfficients $\lambda_i$ sont tous non nuls et dans ce cas**

$$Diag(\lambda_1 \dots, \lambda_n)^{-1} = Diag(\frac{1}{\lambda_1} \dots, \frac{1}{\lambda_n})$$

### 1.4 Transposée d'une matrice.

**Définition 2 . Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle transposée de $A$, la matrice notée ${}^tA$ dont les lignes sont les colonnes de $A$.**

$${}^tA = (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$$

**Propriétés.**
**Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \lambda \in \mathbb{R}$, on a les résultats suivants :**
- ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB$.
- ${}^t({}^tA) = A$.
- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
- **Si $A$ est inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible, avec $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.**

**Matrices symetriques.**
**Ce sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tA = A$.**
**Matrices antisymetriques.**
**Ce sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tA = -A$.**

**Théoréme 1 . Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique**

## 2 Systèmes linéaires

**On appelle système linéaire à $n$ équation et $p$ inconnues et à coefficients dans $\mathbb{R}$, tout système d'équations de la forme**

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

**Un tel système peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = b$ où $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ s'appelle la matrice du système, $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'appelle son second membres, et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont les inconnues.**

**Le système est dit compatible *si et seulement si* il admet des solutions. On a alors le résultat suivant :**

**$(\mathcal{S})$ est compatible *si et seulement si* $b \in \mathrm{Im}(A)$ *si et seulement si* $b$ est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice $A$, au fait résoudre $(\mathcal{S})$ revient à chercher les coefficients de cette combinaison linéaire.**

**Le système $AX = 0$ s'appelle système homogène, ou sans second membre, son ensemble de solutions est exactement le $\mathbb{R}$-ev $\ker(A)$ de dimension $p - r$ où $r = rg(A)$.**

**L'ensemble de solutions du système $(\mathcal{S})$ est exactement $X_0 + \ker(A)$, où $X_0$ est une solution particulière, autrement dit : toute solution $X$ de l'équation $AX = b$ s'écrit sous la forme $X = X_0 + X_1$ où $X_0$ est une solution particulière et $X_1 \in \ker(A)$.**

**Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors toutes les inconnues s'écrivent seulement en fonction de $p - r$ inconnues**

**appelées inconnues principales**
**Le systéme est dit de Crammer lorsque la matrice $A$ est carrée inversible, c'est à dire $n = p = r$, dans ce cas il a admet une unique solution $X = A^{-1}b$.**
**Il est possible d'inverser la matrice $A$, en résolvant le systéme $AX = Y$ et exprimer les coefficients de $X$ en fonction de ceux de $Y$ ce qui donnera le système $BY = X$, on a alors $B = A^{-1}$.**

# 3 Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrices.

## 3.1 Intéprétation.

- **Toute opération sur les lignes d'une matrice se traduit par une multiplication à gauche par une matrice inversible.**
- **Toute opération sur les colonnes d'une matrice se traduit par une multiplication à droite par une matrice inversible.**

## 3.2 Calcul du rang d'une matrice.

**Principe.**
**Faire des opérations sur les lignes et colonnes de la matrice jusqu'à trouver une matrice de type $J_r = (a_{i,j})$ tel que** $a_{i,j} \begin{array}{ll} = 1 & \textbf{si } i = j \leq r \\ = 0 & \textbf{dans les autres cas} \end{array}$

## 3.3 Test d'inversibilité d'une matrice et calcul de l'inverse.

**Rappel.**
**Une matrice carré d'ordre $n$ est inversible *si et seulement si* son rang est égal à $n$.**
**Principe.**
**On effectue des opérations soit sur les lignes soit sur les colonnes, le long de tout le procédé sur la matrice et simultanément sur l'identité en deux blocs jusqu'à ce que le 1èr bloc donne l'identité, alors dans le 2ème bloc on va retouver l'inverse de la matrice en question.**

# 4 Structure de sous-espace vectoriel :

## 4.1 Généralités

**Définition 3** **Une partie $F$ de $\mathbb{R}^n$ est dite sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si* elle vérifie les deux propriétés suivantes :**

**1)** $0_E \in F$.

**2)** $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ **on a :** $x + \lambda y \in F$

## 4.2 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

**Vocabulaire.**
**Soit $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, les éléments de $E$ s'appellent des vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ des scalaires.**

**Définition 4** **Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq m} \in E^n$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle combiniason linéaires de $x_k$ tout élément $x$ de $E$ qui s'écrit sous la forme $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$, où $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq m}) \in \mathbb{R}^m$.**

**Proposition 1 .**

1) **L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1\leq k\leq m}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, qu'on appelle usuellement sous-espace vectoriel engendré par les $(x_k)_{1\leq k\leq m}$ et qu'on note Vect$((x_k)_{1\leq k\leq m})$. On démontre que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant la famille $(x_k)_{1\leq k\leq m}$.**
2) **Par convention, Vect$(\emptyset) = \{0\}$.**

### 4.3 Familles géneratrices

**Définition 5 Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice de $E$ *si et seulement si* tout élément de $E$ s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit Vect$(\mathcal{B}) = E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq m}$ est une famille génératrice de $E$, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq m} \in \mathbb{R}^m$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$.**

### 4.4 Familles liée

**Définition 6 Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.**

**Proposition 2 .**

1) **Toute famille contenant un élément nul est liée.**
2) **Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.**
3) **Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.**

### 4.5 Familles libre

**Définition 7 Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres. En particulier $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq m}$ est libre *si et seulement si* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall (\lambda_k)_{1\leq k\leq m} \in \mathbb{R}^n$. Et on peut surtout en conclure que si deux combinisons linéaires d'une famille libre sont égales alors leurs coefficients sont égaux.**

**Proposition 3 .**

1) **Une famille formée par un seul élément est libre *si et seulement si* cet élément n'est pas nul.**
2) **Une famille formée par deux élémentx est libre *si et seulement si* ces deux éléments ne sont pas proportionnels.**
3) **Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.**

### 4.6 Bases

**Définition 8 On appelle base toute famille à la fois libre et génératrice.**

**Proposition 4 .**

1) **Si $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq m}$ est une base de $E$, alors $\forall x \in E \quad \exists! (\lambda_k)_{1\leq k\leq m} \in \mathbb{R}^m$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$, les coefficients $(\lambda_k)_{1\leq k\leq m}$ s'appellent coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq m}$.**

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

# 5 Notion de dimension

## 5.1 Généralités

**Définition 9** **Un sous-espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.**

**Théoréme 2** **Théorème de la base incompléte**
**Toute famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrice finie pour avoir une base.**

**Corollaire 1** ***Tout sous-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base finie.***

**Théoréme 3** **Dans un $\mathbb{R}$-ev, $E$, de dimension finie toutes les bases sont finie et ont même cardinal, leur cardinal commun s'appelle base de $E$ et se note $\dim_{\mathbb{R}}(E)$.**

**Théoréme 4** **Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$, alors toutes les familles libres sont de cardinal inférieur à $n$ et toutes les familles génératrices sont de cardinal supérieur à $n$. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de $E$ on a le résultat suivant :**

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \text{ est une base de } E &\iff \mathcal{B} \text{ est libre de cardinal } n \\ &\iff \mathcal{B} \text{ est génératrice de cardinal } n \end{aligned}$$

## 5.2 Dimensions de quelques sous-espace vectoriel

**Théoréme 5** **Si $E$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel , $F$ de $E$ est de dimension finie inférieur à celle de $E$, avec égalité *si et seulement si* $E = F$. Avec la convenion que $\{0_E\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.**

**Théoréme 6** **Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, alors $E \times F$ sont aussi de dimension finie avec l'égalité :**

$$\dim_{\mathbb{R}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{R}}(E) + \dim_{\mathbb{R}}(F)$$

**Corollaire 2** $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.

**Théoréme 7** **.**
- $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$.
- $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$.
- $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = n$, **où** $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ **désigne l'ensemble des matrices diagonales.**
- $\dim \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, **où** $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ **désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.**
- $\dim \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, **où** $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ **désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.**
- $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, **où** $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ **désigne l'ensemble des matrices symétriques.**
- $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, **où** $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ **désigne l'ensemble des matrices antisymétriques.**

*Fin*