MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلَهُ وَ المُؤ مِنِين

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

1 Lois de composition interne :

Définition.

Une L.C.I sur un ensemble E, est au fait une application $f: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$, on note $x*y$ ou $x.y$ ou même xy au lieu de $f(x,y)$.

Vocabulaire.

- **Une L.C.I définie sur E est associative *si et seulement si* $\forall (x,y,z)\in E^3$ on a : $(x.y).z = x.(y.z)$.**
- **Une L.C.I définie sur E est commutative *si et seulement si* $\forall (x,y)\in E^2$ on a : $x.y = y.x$.**
- **Un élément e est dit neutre pour une L.C.I définie sur E *si et seulement si* $\forall x\in E$ on a : $x.e = e.x = e$. Notez bien qu'une L.C.I admet un seul ou aucun élément neutre.**
- **- Si une L.C.I admet un élément neutre, e, dans ce cas tout élément $x\in E$ est dit inversible lorsqu'il existe un élément $x'\in E$ tel que $x.x' = x'.x = e$. Dans une telle situation le x' est unique, on le note par x^{-1} et s'appelle**
- **Si deux éléments x et y sont inversibles pour une L.C.I définie sur E, alos $x.y$ est inversible avec $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$.**

2 Les groupes.

2.1 Définition.

Un ensemble G muni d'une L.C.I est dit un groupe *si et seulement si* . est associative, admet un élément neutre, noté en général e_G et tout élément de G est inversible pour cette loi.

2.2 Sous-groupes.

Définition.

Une partie H d'un sous groupe $(G,.)$ est dite sous-groupe de G si et seulement si H est aussi un groupe pour la même L.C.I.

Remarque.

En pratique, pour montrer qu'une partie H d'un sous groupe $(G,.)$ est dite sous-groupe de G il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} e_G \in H \\ \forall (x,y)\in H^2 \text{ on a : } x.y^{-1}\in H \end{cases}$$

2.3 Morphismes de groupes.

Définition.

Une application f entre deux groupes $(G,.)$ et $(G',*)$ est dite morphisme ***si et seulement si*** :

$$\forall\,(x,y)\in E^2,\qquad f(x.y)=f(x)*f(y)$$

Exemple.

l'exponentielle définit un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

Remarque.

Si f un morphisme de groupes entre $(G,.)$ et $(G',*)$, alors :

$$\begin{array}{ll} f(e_G)=e_{G'} & \\ f(x^{-1})=f(x)^{-1} & \forall\,x\in G \\ f(x^n)=f(x)^n & \forall\,x\in G,\forall\,n\in\mathbb{Z}\end{array}$$

Vocabulaire.

Soit f un morphisme de groupes entre $(G,.)$ et $(G',*)$.

- On dit que f est un isomorphisme ***si et seulement si*** f bijective.
- On dit que f est un endomorphisme de G ***si et seulement si*** $G=G'$.
- On dit que f est un automorphisme de G ***si et seulement si*** $G=G'$ et f bijective.

2.4 Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Définition.

Soit f un morphisme de groupes entre $(G,.)$ et $(G',*)$. On appelle :

- Noyau de f, le sous-groupe de G, noté Ker(f) défini par :

$$\text{Ker}(f)=\{x\in G \text{ tel que } f(x)=e_{G'}\}$$

- Image de f, le sous-groupe de G', noté Im(f) défini par :

$$\text{Im}(f)=\{y\in G' \text{ tel que } \exists x\in G:\quad y=f(x)\}$$

Propriétes :

Soit f un morphisme de groupes entre $(G,.)$ et $(G',*)$, alors :

- f est surjective ***si et seulement*** si Im$(f)=G'$.
- f est injective ***si et seulement*** si Ker$(f)=\{e_G\}$.

Remarque : En pratique pour montrer qu'un morphisme de groupes f entre $(G,.)$ et $(G',*)$ est injective, il suffit de montrer que :

$\forall\,x\in G: f(x)=e_{G'}\Rightarrow x=e_G$

3 Anneaux et corps :

Dans toute cette partie, A est un ensemble muni de deux L.C.I $+$ et ., on a les définitions suivantes :

- . est distributive par rapport à $+$ ***si et seulement si*** :

$$\forall\,(x,y,z)\in E^3\quad : x.(y+z)=x.y+x.z \text{ et } (y+z).x=y.x+z.x$$

- On dit que $(A,+,.)$ est un anneau si et seulement si :

$$\begin{cases}(A,+) \text{ groupe abélien } (+ \text{ est commutatif})\\ . \text{ est distributive par rapport à } +\\ . \text{ admet un élément neutre qu'on notera } 1_A\end{cases}$$

  L'élément neutre de A pour la 1ère loi $+$ est en général noté 0_A.
- Si $(A,+,.)$ est un anneau, une partie B de A est dite sous-anneau de A si elle vérifie :

$$\begin{cases}0_A\in B\\ \forall\,(x,y)\in B^2 \text{ on a } x-y\in B \text{ et } x.y\in B\end{cases}$$

- On dit que $(A,+,.)$ est corps si et seulement si :

$$\begin{cases}(A,+,.) \text{ anneau commutatif (. est commutatif)}\\ 0_A\neq 1_A\\ \text{Tout élément de A différent de } 0_A\\ \text{ est inversible pour la 2ème loi .}\end{cases}$$

- Si $(A,+,.)$ est un corps, une partie B de A est dite sous-corps de A si elle vérifie :

$$\begin{cases}0_A\in B\\ \forall\,(x,y)\in B^2 \text{ on a } x-y\in B \text{ et } x.y^{-1}\in B\end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Fin.}}$