Résumé de cours : *Suites numériques*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *mamouni.myismail@gmail.com*

Source disponible sur:
©`http://www.chez.com/myismail`

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولَهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

1.Suites et ordre.

Suite majorée.

C'est une suite (u_n) pour laquelle on peut trouver un nombre réel fixe M, vérifiant : $u_n \leq M$ à PCR[1].

Suite minorée.

C'est une suite (u_n) pour laquelle on peut trouver un nombre réel fixe m, vérifiant : $u_n \geq m$ à PCR.

Suite bornée.

C'est une suite à la fois majorée et minorée.

Remarque.

Une suite (u_n) est bornée *si et seulement si* $\exists M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ à PCR.

Suite croissante.

C'est une suite (u_n) telle que : $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Suite décroissante.

C'est une suite (u_n) telle que : $u_n \geq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Suite monotone.

C'est une suite croissante ou décroissante.

Suite strictement croissante.

C'est une suite (u_n) telle que : $u_n < u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

[1] Abréviation de : à partir d'un certain rang

Suite strictement décroissante.

C'est une suite (u_n) telle que : $u_n > u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Suite strictement monotone.

C'est une suite strictement croissante ou bien strictement décroissante.

Remarque.

Toute suite croissante est minorée par son premier terme, et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

2.Limite d'une suite.

2.1 : Limite finie.

Définition.

On dit qu'un nombre réel fini, l est limite d'une suite numérique (u_n) et on écrit $\lim\limits_{+\infty} u_n = l$, *si et seulement si* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \quad |u_n - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0}$$

Vocabulaire.

On appelle suite convergente toute suite qui admet une limite finie.

Propriétés.

- $\lim\limits_{+\infty\to u} {}_n = 0 \iff \lim\limits_{+\infty\to|} u_n| = 0$.
- $\lim\limits_{+\infty\to u} {}_n = l \iff \lim\limits_{+\infty\to|} u_n - l| = 0$.
- **Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.**
- **Si (u_n) bornée et $\lim\limits_{+\infty\to u} {}_n = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty\to u} {}_n v_n = 0$.**

- Si $|u_n| \leq v_n$ et $\lim\limits_{+\infty \to v} {}_n = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n = 0$.
- Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n = \lim\limits_{+\infty \to w} {}_n = l$, alors $\lim\limits_{+\infty \to v} {}_n = l$.
- Si (u_n) et (v_n) sont convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à PCR, alors $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \leq \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$.
- Si (u_n) et (v_n) sont convergentes telles que $u_n < v_n$ à PCR, alors $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \leq \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$.
- Si (u_n) et (v_n) sont convergentes telles que $u_n \geq v_n$ à PCR, alors $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \geq \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$.
- Si (u_n) et (v_n) sont convergentes telles que $u_n > v_n$ à PCR, alors $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \geq \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$.
- Si (u_n) et (v_n) sont convergentes telles que $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n < \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$, alors $u_n < v_n$ à PCR.
  Mais si $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \leq \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$, on ne peut rien dire.
- Si (u_n) et (v_n) sont convergentes telles que $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n > \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$, alors $u_n > v_n$ à PCR.
  Mais si $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \geq \lim\limits_{+\infty \to v} {}_n$, on ne peut rien dire.
- Si (u_n) convergente telle que $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n < \alpha$, alors $u_n < \alpha$ à PCR.
  Mais si $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \leq \alpha$, on ne peut rien dire.
- Si (u_n) convergentes telle que $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n > \alpha$, alors $u_n > \alpha$ à PCR.
  Mais si $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n \geq \alpha$, on ne peut rien dire.

2.2 :Limite infinie.

- On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n = +\infty$ ***si et seulement si*** :

$$\boxed{\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \geq A \quad \forall n \geq n_0}$$

- On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n = -\infty$ ***si et seulement si*** :

$$\boxed{\forall A < 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \leq A \quad \forall n \geq n_0}$$

2.3 Opérations sur les limites.

	Opérations possibles	Formes indétérminé
Somme	$l + \infty = \infty \quad \infty + \infty = \infty$	$\infty - \infty$
Produit	$l \times +\infty = +\infty$ si $l > 0$ $l \times +\infty = -\infty$ si $l < 0$ $+\infty \times +\infty = +\infty \quad +\infty \times -\infty = -\infty$	$0 \times \infty$
Rapport	$\frac{l}{\infty} = 0$ si $l \neq 0$ $\frac{\infty}{l} = \infty$ si $l \neq$	$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{\infty}{0}, \quad \frac{l}{0}$

3.Suites particulières.

3.1 :Suites arithmétiques de raison r.

Ce sont les suites réelles (u_n) vérifiant une équation de type : $u_{n+1} = r + u_n$.

Dans ce cas on a les propriétés suivantes :

- $u_n = u_0 + nr$.
- $\lim\limits_{+\infty \to u} {}_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } r < 0 \\ u_0 & \text{si } r = 0 \\ +\infty & \text{si } r > 0 \end{cases}$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} = \frac{\text{(1er+Dernier)(Nombre de termes)}}{2}$.

3.2 :Suites géométriques de raison q.

Ce sont les suites réelles (u_n) vérifiant une équation de type : $u_{n+1} = qu_n$.

Dans ce cas on a les propriétés suivantes :

- $u_n = u_0 q^n$.

- $\lim_{+\infty \to u} {}_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 0 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \text{La raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{La raison}}$.

3.3 :Suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente est stationnaire à PCR en sa limite.

3.4 :Suites monotones.

- Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.
- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

3.5 :Suites adjacentes.

Définition.

Deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence tend vers 0.

Remarque.

Si deux suites sont adjacentes, alors les termes de celle croissante sont majorés par ceux de l'autre qui est décroissante.

Théorème.

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

3.6 :Suites extraites.

Définition.

Un suite extraite de (u_n) est toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Théorème. Si (u_n) tend vers une limite finie ou infinie, alors toutes ses suites extraites tendent vers la même limite.

En particulier : $\lim_{+\infty \to u} {}_n = l \iff \lim_{+\infty \to u} {}_{n+1} = l \iff \lim_{+\infty \to u} {}_{n-1} = l$.

4.Relations de comparaison.

4.1 :Dominance.

On dit que (u_n) est dominée par (v_n), et on écrit $u_n = O(v_n)$ ***si et seulement si*** $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée.

4.2 :Négligence.

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on écrit $u_n = o(v_n)$ ***si et seulement si*** $\lim_{+\infty \to} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

4.3 :Équivalence.

On dit que (u_n) est équivalent à (v_n), et on écrit $u_n \sim v_n$ ***si et seulement si*** $\lim_{+\infty \to} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriétés.

- L'équivalence est compatible avec le produit, le rapport mais pas avec la somme, c'est à dire que :
  $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \Longrightarrow u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$,
  mais
  $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \not\Rightarrow u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.
- Si $u_n = v_n + w_n$ tel que $w_n = o(v_n)$, alors $u_n \sim v_n$, autrement dit : l'équivalent d'une somme est son terme dominant.
- Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Deux suites équivalentes ont la même limite, finie ou infinie, ou bien n'ont pas de limite, c'est à dire sont de même nature.
  Les réciproques ne sont pas toujours vraies, toute fois si deux suites ont une même limite finie et non nulle, alors elles sont équivalentes.

4.4 :Comparaison des suites de référence.

- Les log sont négligeables devant les puissance : $(\ln n)^a = o(n^b)$ quand $a > 0$ et $b > 0$.
- Les puissances sont négligeables devant les exponentielles : $n^a = o(b^n)$ quand $a > 0$ et $b > 1$.
- Les exponentielles sont négligeables devant les factoriels : $b^n = o(n!)$ quand $b > 0$.