Résume de cours 6 : *Suites réelles*

Lundi 25 Octobre 2004

Notation : L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définitions :

1. On dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers un nombre fini, l, $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l)$ si et seulement si : $\forall \varepsilon < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ on a : $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
2. On dit qu'une suite réelle (u_n) diverge vers $+\infty$, $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty)$ si et seulement si : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ on a : $u_n \geq A$.
3. On dit qu'une suite réelle (u_n) diverge vers $-\infty$, $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty)$ si et seulement si : $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ on a : $u_n \leq A$.

Remarque : Il existe des suites qui n'ont aucune limite, ni finie ni infinie. *Exemple* : $(-1)^n$ ou $\sin(n)$.

Propriétés :

1. Une suite réelle croissante (resp. décroissante) converge vers un nombre fini si elle est majorée (resp. minorée), et diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), avec $u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (resp $u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$).
2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que : $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).
3. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que : $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
4. Si $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites réelles telles que : $u_n \leq w_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. *Théorème des gendarmes.*
5. Si (u_n) est une suite réelle convergeante et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $u_n \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \alpha$.

Comparaison de suites réelles non nulles à partir d'un certain rang :

Définitions :

- On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) *si et seulement si* : $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$. On écrit alors $u_n = o(v_n)$.
- On dit que (u_n) est équivalent avec (v_n) *si et seulement si* : $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. On écrit alors $u_n \sim (v_n)$.

Propriétés :

$\alpha_n \to 1 \implies \alpha_n u_n \sim u_n$	$\alpha_n = o(u_n) \implies \alpha_n + u_n \sim u_n$

.

Comparaison logarithmique : On pose $w_n = |\dfrac{u_n}{v_n}|$ et on cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ alors $u_n = o(v_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} > 1$ alors $v_n = o(u_n)$.

$\forall \alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ on a : $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), n^\beta = o(a^n), a^n = o(n!), n! = o(n^n)$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca