MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Définition 1. *On appelle* ***permutaion*** *de* $[|1,n|]$ *toute bijection :* $\sigma : [|1,n|] \to [|1,n|]$. *L'ensemble de ces permutaions se note* $\mathcal{S}_n$, *muni de la loi o est un groupe non abélien de cardinal* $n!$, *appellé groupe symétrique d'ordre* n.

Définition 2. *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$, *on appelle* ***support*** *de* σ, *l'ensemble* $supp(\sigma) = \{k \in [|1,n|] \text{ tel que } \sigma(k) \neq k\}$.

Définition 3. *On appelle* ***transposition*** *toute permutation dont le support est formé par deux éléments. Dans ce cas si* $supp(\sigma) = \{i,j\}$ *alors* $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$, *on note alors* $\sigma = (i \quad j)$ *et on a :* $\sigma^2 = id_{[|1,n|]}$.

Définition 4. *On dit que* σ *est un* p-***cycles*** *si* $\exists (i_1, i_2, \ldots, i_p) \in [|1,n|]^p$ *tel que* $supp(\sigma) = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ *avec* $\sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \forall 1 \leq k \leq p-1$ *et* $\sigma(i_p) = i_1$. *Dans ce cas on écrit* $\sigma = (i_1 \quad i_2, \ldots i_p)$ *et on a :* $\sigma^p = id_{[|1,n|]}$.

Théoréme 1. $(i_1 \quad i_2, \ldots i_p) = (i_1 \quad i_2)(i_2 \quad i_3)\ldots(i_{p-1} \quad i_p)$. *C'est à dire que tout* p*-cycle peut s'écrire comme produit de* $p-1$ *transpositions.*

Théoréme 2. *Toute permutation peut s'écrire comme produit de p-cycles. On dit que* $\mathcal{S}_n$ *est engendré par les p-cycles.*

Corollaire 1. *Toute permutation peut s'écrire comme produit de transposition. On dit que* $\mathcal{S}_n$ *est engendré par les transpositions.*

Définition 5. *On appelle* ***inversion*** *de* σ, *tout couple* $(i,j) \in [|1,n|]^2$ *tel que* $i < j$ *et* $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Définition 6. *On appelle* ***signature*** *de* σ, *noté* $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, *définie par* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{Nombre d'inversions de } \sigma}$.

Théoréme 3. *La signature définit un morphisme de group entre* $(\mathcal{S}_n, o)$ *et* $(\{-1,1\}\times)$, *c'est à dire que* $\forall (\sigma,\tau) \in \mathcal{S}_n^2$ *on a :* $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Théoréme 4. *la signature d'une transposition est toujours -1.*

Théoréme 5. *la signature d'un p-cycle est toujours* $(-1)^p$.

Définition 7. *On appelle* ***permutation paire*** *toute permutation de signature 1.*
L'ensemble des pemutations paires se note $\mathcal{A}_n$, *c'est un sous-groupe de* $\mathcal{S}_n$, *de cardinal* $\dfrac{n!}{2}$, *on l'appelle* ***groupe alterné*** *d'ordre* n.

Théoréme 6. *Toute permutation paire peut s'écrire comme produit de 3-cycles. On dit que* $\mathcal{A}_n$ *est engendré par les 3-cycles.*

Fin.