Resumé de cours 2 : *Théorie des ensembles*

Lundi 20 Septembre 2004

I. Applications et ensembles :

Application : Une application $f : E \to F$ est bien définie *si et seulement si* :
$\forall (x, x') \in E^2$, $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Injection : Une application $f : E \to F$ est injective *si et seulement si* :
$\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Surjection : Une application $f : E \to F$ est surjective *si et seulement si* :
$\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

Bijection : Une application $f : E \to F$ est bijective *si et seulement si* :
$\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

Image directe d'une partie : Soit $f : E \to F$, A une partie de E et $y \in F$.
$y \in f(A)$ *si et seulement si* : $\exists x \in A$ tel que : $y = f(x)$.

Propriétés : Soit $f : E \to F$, A et B deux parties de E. On a les résultats suivants :
$f(\emptyset) = \emptyset; f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B); f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Image réciproque d'une partie : Soit $f : E \to F$, A une partie de F et $x \in E$.
$x \in f^{-1}(A)$ *si et seulement si* : $f(x) \in A$.

Propriétés : Soit $f : E \to F$, A et B deux parties de F. On a les résultats suivants :
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset; f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B); f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

II. Relations binaires : Dans la suite on suppose $\Re$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

Réflexivité : $\Re$ est dite réflexive *si et seulement si* : $\forall x \in E$ on a : $x \Re x$.

Symetrie : $\Re$ est dite symetrique *si et seulement si* : $\forall (x, y) \in E^2$ on a : $x \Re y \Rightarrow y \Re x$.

Antisymetrie : $\Re$ est dite antisymetrique *si et seulement si* : $\forall (x, y) \in E^2$ on a :
$(x \Re y$ et $y \Re x) \Rightarrow x = y$.

Relation d'équivalence : $\Re$ est une relation d'équivalence *si et seulement si* : elle est à la fois réflexive, symetrique et transitive.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose : $a \Re b$ *si et seulement si* : n divise $a - b$. On dit alors que a est congru à b modulo n et on écrit : $a \equiv b\ [n]$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\overrightarrow{u} \Re \overrightarrow{v}$ *si et seulement si* : $\exists \lambda > 0$ tel que : $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

Classes d'équivalence : Si $\Re$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x est la partie de E, notée $\overline{x}$ définie par la relation : $y \in \overline{x}$ *si et seulement si* : $y \Re x$.

Exemples : Pour la congruence modulo 2 dans $\mathbb{N}$, on a : $\overline{0} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$, alors que pour la congruence modulo 3 dans $\mathbb{N}$, on a : $\overline{0} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

Propriétes : Si $\Re$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, on a les résultats suivants :

($\forall x \in E$ on a : $x \in \overline{x}$) et ($\forall (x,y) \in E^2$ on a : $x \Re y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$).

Famille de parties : Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, on a les définitions suivantes : $\forall x \in E$, $x \in \bigcup\limits_{i\in I} \Leftrightarrow \exists i \in I$ tel que : $x \in A_i$; $x \in \bigcap\limits_{i\in I} \Leftrightarrow \forall i \in I$ on a : $x \in A_i$

Partition : Soit E un ensemble,$(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E est dite une partition de E *si et seulement si* : elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

1. $\forall i \in I$ on a : $A_i \neq \emptyset$.
2. $\forall (i,j) \in I^2$ on a : $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. $\bigcup\limits_{i\in I} = E$.

<u>*Théorème 1*</u> : Soit $f : E \to F$, alors $\left(f^{-1}\{y\}\right)_{y\in f(E)}$ est une partition de E.

<u>*Théorème 2*</u> : Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence définie sur un ensemble forment une partition de cet ensemble.

<u>*Théorème 3*</u> : Si $(A_i)_{i\in I}$est une partition d'un ensemble E, alors on peut définir sur cet ensemble E une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont exactement les parties A_i.

Relation d'ordre : $\Re$ est une relation d'ordre *si et seulement si* : elle est à la fois réflexive, antisymetrique et transitive.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{N}$, on pose : $a\Re b$ *si et seulement si* : $a \leq b$. Ordre usuel.
2. Dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $a\Re b$ *si et seulement si* : a divise b.
3. Dans $\mathbb{N}^2$, on pose : $(a,b)\Re(c,d)$ *si et seulement si* : $a \leq c$ et $b \leq d$.
4. Dans $\mathbb{N}^2$, on pose : $(a,b)\Re(c,d)$ *si et seulement si* : $(a < c)$ ou $(a = c$ et $b \leq d)$. Ordre lexicographique.
5. Dans $\mathcal{P}(E)$, on pose : $A\Re B$ *si et seulement si* : $A \subset B$.

Ordre total ou partiel : Une relation d'ordre $\Re$ sur un ensemble est dite totale *si et seulement si* : Tous les éléments de E sont comparable avec $\mathbb{R}$, c'est à dire que : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $x\Re y$ ou $y\Re x$. Dans le cas contraire c'est à dire quand : $\exists (x,y) \in E^2$ tel que : $x\Re y$ fausse et $y\Re x$ fausse, dans ce cas on dit que $\Re$ est une relation d'ordre partielle.

Exercice : Parmi les exemples précédents préciser les relations d'ordre qui sont totales et ceux qui ne le sont pas.

Majorant : Soit $\Re$ une relation d'ordre sur un ensemble E et a et b deux éléments de E, on dit que b est un majorant de a quand $a\Re b$, et on dit que b est un majorant d'une partie A de E quand b est un majorant de tous les éléments de A. On dit que la partie A admet un plus grand élément s'il existe un élément de A qui majore tous les autres élément, dans ce cas il est unique et on le note $\max A$.

Minorant : Soit $\Re$ une relation d'ordre sur un ensemble E et a et b deux éléments de E, on dit que b est un minorant de a quand $b\Re a$, et on dit que b est un minorant d'une partie A de E quand b est un minorant de tous les éléments de A. On dit que la partie A admet un plus petit élément s'il existe un élément de A qui minore tous les autres élément, dans ce cas il est unique et on le note $\min A$.

Exercice : Trouve les min et max quan ils existent des parties $\{1,2,3,6\}$; $\{2,3,6\}$; $\{1,2,3\}$; $\{2,3\}$ où la relation d'ordre est $a\Re b$ *si et seulement si* a divise b.

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca