High Tech Prépas, Rabat

Feuille d'exercices: *Fonctions convexes*

9 février 2010

Blague du jour :
• Mamie dit à son petit-fils :
- Puisque c'est ton anniversaire, je vais te faire un gâteau avec douze bougies !
- Tu sais, Mamie, ce que je préférerais, c'est que tu me fasses douze gâteaux avec une une bougie.
• Entre un homme qui a un milliard de dirhams, et un homme qui a 10 enfants enfants, quel est celui qui est le plus satisfait ? - C'est l'homme qui est père de dix enfants. Celui qui a un milliard de dirhams en veut encore plus.

Mathématicien du jour **Cauchy**
Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857), est un mathématicien français. Catholique fervent et Royaliste légitimiste,ses positions politiques et religieuses lui valut nombre d'oppositions.
Il est après Leonhard Euler l'un des mathématiciens les plus prolifiques. Ses travaux de recherche couvrent l'ensemble des domaines mathématiques. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des séries et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques. Toutefois la négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel, perdant leurs manuscrits, a cependant entaché son prestige.

Toutes les fonctions considérées sont dans cette feuille d'exercice de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 1 *Soient* $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.
Montrer que : $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 2 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexe.*
Montrer que l'on a :
– *Soit* f *croissante sur* $\mathbb{R}$.
– *Soit* f *décroissante sur* $\mathbb{R}$.
– *Soit il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* f *est décroissante sur* $]-\infty, a]$, *puis croissante sur* $[a, +\infty[$.

Exercice 3 .

1) *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexe et borne. Montrer que* f *est décroissante.*

2) *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexe et borne. Montrer que* f *est constante.*

Exercice 4 *Soit* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexe et* $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *affine telles que :* $\forall\ x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ *et* $f(1) = g(1)$.
Montrer que : $f = g$

Exercice 5 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexe telle que* $\mathcal{C}_f$ *admet une asymptote d'équation* $y = mx + p$ *en* $+\infty$.
Montrer que $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de cette asymptote.*

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

Exercice 6 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.*
Montrer que f' est continue.

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \leq 0$, $f' \leq 0$, $f'' \leq 0$.*

1) *Étudier l'existence des limites (dans $\mathbb{R} \cup \{\mp ß\}$) en $+ß$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\dfrac{f(x)}{x}$.*

2) *Mme question pour les limites en $-ß$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.*

Exercice 8 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que :*
$\forall\ x, y \in [a,b],\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

Exercice 9 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ convexe, bijective, croissante.*
On pose : $a \leq u_0 = u \leq v_0 = v \leq b$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right)$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une mme limite.

Exercice 10 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.*
Montrer que : $\ln f$ est convexe $\Longleftrightarrow \forall \alpha > 0$, f^α est convexe.

Exercice 11 .

1) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.*
Montrer que $p = \lim\limits_{+\infty \to (} f(x) - xf'(x))$ existe.

2) *On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est borne au voisinage de $+\infty$, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.*

3) *Montrer alors que $\lim\limits_{+\infty \to f}(x) - mx - p = 0$.*

Exercice 12 *Étant donné une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.*

Exercice 13 *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty \to f}(x) = f(0)$.*
Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 14 *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ concave.*

1) *Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.*
Indication : Utiliser la monotonie de la fonction :
$\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

2) *Montrer que : $\forall\ x, y \geq 0,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.*
Indication : Utiliser la définition de la convexité avec
$t = \dfrac{x}{x-y} < 0$.

Exercice 15 Constante d'Euler.
Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1) *Montrer que :* $\forall\ x \geq 1,\ \ f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.

2) *On pose :* $u_n = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n)$
$v_n = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) - f(n+1)$
Montrer que ces suites convergent.

3) *On prend* $f(x) = \ln x$. *Soit* $\gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ *(constante d'Euler).*
Calculer γ 10^{-2} *près.*

Exercice 16 Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable telle que :* $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a < b$, $\exists!\ c \in]a, b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

1) *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *la fonction* $b \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *est monotone sur* $]-\infty, a[$ *et sur* $]a,+\infty[$.

2) *En dduire que* f *est strictement convexe ou strictement concave.*

Exercice 17 Pseudo-drive seconde.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. On suppose que :*
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ D^2f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ *existe.*

1) *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$, *calculer* $D^2f(x)$.

2) *Soit* f *quelconque et* $a < b < c$ *tels que* $f(a) = f(b) = f(c)$.
Montrer qu'il existe $x \in]a, c[$ *tel que* $D^2f(x) \leq 0$.
Indication : Prendre x *tel que* $f(x)$ *soit maximal.*

3) *On suppose à présent que :* $\forall\ x \in \mathbb{R}, D^2f(x) \geq 0$.

a) *Soient* $a < b < c$ *et* P *le polynôme de degré inférieur ou égal 2 coïncidant avec* f *aux points* a, b, c. *Montrer que* $P'' \geq 0$.

b) *Calculer* P'' *en fonction de* a, b, c *et* $f(a), f(b), f(c)$. *En déduire que* f *est convexe.*

Exercice 18 Inégalités en vrac

1) *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x \geq 2e^{\frac{x}{2}}$.

2) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$.

3) *Soit* $x \in]1,+\infty[$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que :* $x^n - 1 \geq n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right)$.

Exercice 19 Moyenne arithmico-géométrique, harmonique.
Soit $x_1, \ldots, x_n$ n *réels strictement positifs. On définit leur moyennes arithmétique, géométrique et harmonique par :*

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

Montrer que :

$$h \leq g \leq a$$

Exercice 20 Inégalités de Hölder, Minkowski et Cauchy-Schwarz.

Soit p et q deux réels strictement supérieurs 1 tels que : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ *Soit $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ des réels positifs.*

1) *Le but de cette question est de montrer que :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ *(Inégalité de Hölder.)*

a) *Montrer que :* $\forall x,y \in \mathbb{R}^* \quad xy \leq \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$

Indication : On pourra utiliser la concavité de la fonction $\ln$.

b) *Montrer le résultat demandé lorsque :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 1 \quad$ *et* $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1$

c) *En déduire le cas général.*

d) *En déduire que :* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$ *(Inégalité de Cauchy-Schwarz.)*

2) *Montrer que :* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *(Inégalité de Minkowski.)*

Fin
à la prochaine