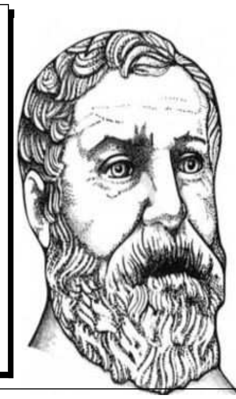
CPGE My Youssef, Rabat

Feuille d'exercices: *Courbes Planes*

3 janvier 2010

Blague du jour
Un biologiste, un physicien, un mathmaticien et un informaticien discutent, pour dterminer quel est le plus vieux mtier du monde.
Le biologiste proteste : avant l'homme, il a y avait des animaux, les plantes, tout l'écosystme, qu'il fallait étudier et ça, c'est du travail de biologiste.
Le physicien : oui, mais avant ça il y avait les plantes, les étoiles, mettre en relation tout ça ! ! et c'est de la physique !
Le mathématicien : certes, mais pour former ces plantes et tout, il faut des lois, il faut de l'ordre, pour avoir quelque chose partir du chaos. Et quoi mieux que les maths pour incarner cet ordre ?



mathmaticien du jour ***Héron***
Héron d'Alexandrie ou Héron L'Ancien est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle après J.-C.
Héron d'Alexandrie (100 ap. J.-C.) créateur d'automates émus par l'eau, s'intéresse à la vapeur et à l'air comprimé. Principalement connu pour les machineries décrites dans son Trait des pneumatiques (Pneumatica), on lui doit par ailleurs un projet de machine destiné à ouvrir automatiquement les portes d'un temple.
On attribue à Héron d'Alexandrie plusieurs formules mathématiques dont une de calcul de l'aire d'un triangle à partir de la longueur de ses côtés (la formule de Héron), ainsi qu'une autre permettant d'approcher la racine carrée de n'importe quel nombre de manière récursive. Cependant, la première formule est déjà prouvée par Archimède, et la seconde est déjà connue des Babyloniens. Il fut aussi l'auteur de formules de mesures de longueur, de surface et de volume pour des objets en trois dimensions.

1 Courbes Planes paramétrées.

Exercice 1 . **Construire les courbes planes paramétrées d'équations :**

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = tx \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{te^t}{t+1} \\ y = \dfrac{e^t}{t+1} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2t^3 + 3t^2 \\ y = 3t^2 + 6t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^3 - t^2 - t + 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \sin \dfrac{t}{2} \\ y = \tan t \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = \dfrac{1}{t^2} + t^2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \sin \dfrac{t}{2} \\ y = \tan t \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t}{t} \\ y = te^t \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \sin t \cos 2t \\ y = \cos t \sin 2t \end{cases}$

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

Exercice 2 . **Construire les courbes planes paramétrées d'équations :**

1) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t) \sin t \\ y = \sin^2 t \cos t \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (1 + \cos t) \sin 2t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2t^3 + 3t^2 \\ y = 3t^2 + 6t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^3 - t^2 - t + 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = t^5 - t^3 + \dfrac{t}{4} \\ y = \dfrac{3t}{3t^2 + 1} \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y = \sin 2t \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{t^2 - 2}{t^4 - 1}} \\ y = tx \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t+1)^2} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1} \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = tx \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \dfrac{te^t}{t+1} \\ y = \dfrac{e^t}{t+1} \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = 2t^3 + 3t^2 \\ y = 3t^2 + 6t \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^3 - t^2 - t + 1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t^2}{t - 1} \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = \sin \dfrac{t}{2} \\ y = \tan t \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = \dfrac{1}{t^2} + t^2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$

2 Courbes en coordonnées polaires.

Exercice 3 . **Construire les courbes d'équation polaire :**

1) $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1}$

2) $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3) $\rho(\theta) = \theta \sin(\theta)$

4) $\rho(\theta) = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$

5) $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$

6) $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$

3 Étude métrique.

Exercice 4 . **Déterminer les courbes pour lesquelles** $\widehat{MOC} = \dfrac{\pi}{2}$ **tel que** C **centre de courbure de la courbe au point** M.

Exercice 5 . **Soit** (γ) **la courbe de représentation paramétrique définie par :** $\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos(t)} \\ y(t) = \sqrt{\sin(t)} \end{cases}$ **tel que** $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coincide avec l'origine

Exercice 6 . **Soit** (γ) **courbe plane parametrée de classe** $\mathcal{C}^3$, (γ_1) **l'ensemble des points,** C **centres de courbure de** (γ), **et** (γ_2) **l'ensemble des milieux** I **des segments** $[M, C_1]$
Montrer que la tangente (γ_2) **au point** I **est orthogonal** $\overrightarrow{MC_1}$

Exercice 7 . **Soit** (γ) **une courbe plane parametrée de classe** $\mathcal{C}^1$, **tout point** M **de** (γ) **on associé** H **la projection orthogonale de O sur la tangente en M** (γ), **et soit** (γ_1) **l'ensemble de ces projections. Montrer que la normale** (γ_1) **au point** H **passe par le milieu de** $[O, M]$

Exercice 8 . **Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique dfinie par :**

$$\begin{cases} x(t) = a(1+\cos(t)) \\ y(t) = a\sin(t) \end{cases} \quad \textbf{tel que } a > 0$$

1) **Reconnaitre la nature géometrique de (γ)**
2) **Soit (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a (γ). Donner une repésentation paramétrique de (Γ).**
3) **En déduire une équation polaire de (Γ)**
4) **Soit M un point de (Γ) d'angle polaire $\theta, \overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M à (Γ) orienté dans le sens des θ croissants,exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\tau}}\right)$**
   En déduire les poins de (Γ) où la tangente est verticale ou horizontale

Exercice 9 . **Soit (γ) arc géométrique plan tel que : $\forall M \in (\gamma)$ on a : l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où C est le centre de courbure de (γ) au point M**

1) **Si α désigne l'ange entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M montrer que : $x^2 + y^2 - \left(x\dfrac{dy}{d\alpha} - y\dfrac{dx}{d\alpha}\right)$.**
2) **Si θ désigne l'ange entre la droite (OM) et l'axe (Ox), β celui entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M,.**
   Montrer que : $\dfrac{d\theta}{da} \quad \tan(\beta) = \dfrac{r}{r'}$
   On pourra utiliser les coordonnes polaires avec $r = OM$.
3) **En déduire que (γ) est une spirale.**

Exercice 10 . **Soit (γ) l'arc géométrique plan définie par l'équation polaire : $r(\theta) = \sin^n\left(\dfrac{\theta}{n}\right)$ tel que $n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta < n\pi$**

1) **calculer $||\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}||$.**
2) **En déduire que si β est l'angle entre la droite (OM) et la tangente (γ) au point M alors : $\beta = \dfrac{\theta}{n}$.**
3) **En déduire l'angle α entre l'axe (Ox) et la tangente (γ) au point M, puis R le rayon de courbure.**
4) **Soit $M'e$ la projection orthogonale de C, centre de courbure de (γ) au point M, sur la droite (OM), montrer que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{n+1}$**

Exercice 11 . **Déterminer les coordonnes du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :**

1) **Cycloide :** $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$
2) **Astroide :** $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$
3) **Hyperbole d'quation $xy = 1$.**
4) **Ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.**
5) **Spirale logarithmique : $\rho = e^\theta$.**
6) **Cardioide : $\rho = 1 + \cos\theta$.**

Fin
à la prochaine