1. MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°10

Lundi le:25-Novembre-2002

Fonctions Réelles

1. Trouver toutes les fonctions $f : IR \to IR$ continues telles que
   - a. $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tous réels x,y
   - b. $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x,y
   - c. $f(x+y) = f(x)f(y)$pour tous réels x,y
   - d. $f(xy) = f(x)+f(y)$ pour tous réels x,y
2. Etudier la monotonie sur IR_+^* de la fonction réelle :$f : x \to xE(\frac{1}{x})-1$
3. Soient I un intervalle ouvert de IR et $a \in I$.$f : I \to IR$ une application dérivable en a.
   - a. Trouver $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$
4. Soit I un intervalle de IR et $f \in \wp^n(I)$.
   - a. Montrer que :$\forall x \in IR / \frac{1}{x} \in I$on a: $(x^{n-1}f(\frac{1}{x}))^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \quad f^{(n)}(\frac{1}{x})$
5. *Application*: calculer la dérivée n^{eme} des fonctions g et h définies par:
   $g(x) = x^{n-1}ln(1+x), h(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$
6. Montrer que toutes les dérivées de $x \to \frac{1}{cos(x)}$ sont positives sur $]0,\frac{\pi}{2}[$
   - a. soit $f : [a,b] \to [a,b]$croissante continue montrer que f admet un point fixe.
   - b. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement croissante
   - c. a-t-on le même résultat si f est décroissante
7. On pose $f(x) = x^2(2+sin(\frac{1}{x^2}))$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ montrer que f admet un minimum en strict en 0 mais f n'est croissante sur aucun intervalle de la forme $[0,a]$
8. On pose $f(x) = x/(1+xsin(\frac{1}{x}))$ si $0 < x \leq 1$ et $f(0) = 0$ montrer que f est dérivable sur strictement croissante mais que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions
   - a. soit $f : [a,b] \to IR$ de classe $\wp^1$ montrer que f injective $\Rightarrow$ strictement monotone.
   - b. reprendre la même question en supposant cette fois $f$continue
9. soit $f : [a,b] \to IR$ dérivable telle que $f(0) = 0$ on pose $S_n(f) = \sum\limits_{k=n}^{2n} f(\frac{1}{k})$
   - a. montrer que la suite $x_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$est convergente soit L sa limite , on ne cherchera pas a la calculer
   - b. montrer que $Sn(f)$ converge vers un réel S qu'on exprimera en fonction de $L, f'(0)$(*indication* : on pourra utiliser la définition de$f$ dérivable en 0).
   - c. en prenant $f(x) = ln(1+x)$ expliciter S puis en déduire L
10. Soit $n \in IN^*$Calculer la dérivé n^{eme} de la fonction $f_n(x) = x^n lnx$
11. Soit f une application dérivable de IR dans IR de limite $+\infty$ en - ∞ et en $+\infty$ montrer que f' admet au moins un zéro.
12. *Théorème des accroissement finis généralises*
    Soient $f,g : [a,b]àIR$ continues dérivables sur $]a,b[$ tel que $|f'(x)| \leq |g'(x)|, \forall x \in]a,b[$ montrer alors que $|f(b)-f(a)| \leq |g(b)-g(a)|$
13. *Problème d'emballage*
    Une usine fabrique des boites paralleipediques sans couvercle de la façon suivante : on prend une feuille rectangulaire de carton de cotes a et b puis on découpe de chaque coin un

carre de cote x puis on rabat les morceau ainsi obtenues , quelle est la valeur de x qui réalise un volume maximal

14. *Algorithme de Newton*

Soit$a > 0$

- **a**. étudier les variations sur $]0,+\infty[$de la fonction définie par$f(x) = \frac{x+\frac{a}{x}}{2}$
- **b**. justifier que la suite définie par $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$pour tout $n \in IN$est bien définie.
- **c**. montrer que pour tout $n \in IN$on a : $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$
- **d**. montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{a - x_{n+1}^2}{2x_{n+1}}$.
- **e**. en déduire que $x_n \to \sqrt{a}$.
- **f**. montrer que pour tout $n \in IN$ on a :$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$
- **g**. en déduire une majoration de $x_n - \sqrt{a}$en fonction de n, a.
- **h**. en déduire une valeur approchée de $\sqrt{e}$ a 10^{-3} près (on admet que $2 < e < 2.8$).
- **i**. écrire un programme en *Maple*® qui affiche les 20 premiers termes de la suite x_n.
- **j**. écrire un programme en *Maple*® qui donne une valeur approchée de $\sqrt{e}$ a 10^{-8} près

15. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \forall n \in IN$.

- **a**. écrire un programme *Maple*® qui affiche les 20 premiers termes de la suit (u_n).
- **b**. calculer a l'aide d'une calculatrice la valeur de u_{10}.
- **c**. étudier sur$[0,1]$ la fonction $f$définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$, en déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge ,calculer sa limite.
- **d**. dans toute la suite on pose$v_n = 1 - u_n$
  - **i**. montrer que $\forall n \geq 1$ on a :$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2-v_n}$
  - **ii**. en déduire que$\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_n} \geq \frac{n+3}{2}$
  - **iii**. montrer que$\forall x \in [0,1]$on a : $\frac{1}{2-x} \geq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$
  - **iv**. en déduire que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}$
  - **v**. en déduire que$\forall n \geq 2$ on a : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$
  - **vi**. en déduire que$\forall n \geq 2$on a : $\frac{1}{v_n} \leq \frac{n+3}{2} + ln(n+2)$
  - **vii**. en déduire un équivalent simple de v_n puis de u_n

16. :montrer que : $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$

Applications :

- **a**. en déduire la limite de $\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$(où $x > 0$)
- **b**. donner un exemple d'une suite (x_n) telle que : $x_n \to 1$mais$x_n^n \nrightarrow 1$.
- **c**. calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
- **d**. soit $0 < r < 1, 0 < a < b$, on pose $u_0 = a, u_1 = b, u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n$, montrer que (u_n) est croissante majorée
- **a**. montrer que pour tout $n \geq 2$ l'équation $x + x^2 + . + x^n = 1$ admet une solution unique dans $]0,1[$ que l'on notera x_n.
- **b**. montrer que (x_n)est monotone et convergente.
- **c**. calculer sa limite

17. soit $n \in IN^*, (a,b) \in IR^2$ tel que $a < b$ et $f$de classe $\wp^n$ sur $[a,b]$ qui s'annule au moins $n+1$ fois , montrer alors que $f^{(n)}$s'annule au moins une fois.soit $n \in IN^*$,
$a_1 < a_2 < .... < a_n$ n nombres reéls et f de classe $\wp^n$ sur $[a_1, a_n]$ qui s'annule dans tous les

a_i , montrer que $\forall x \in [a_1, a_n]\ \exists c_x \in]a_1, a_n[$ tel que $f(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)$, on pourra fixer x et considerer la fonction $g(t) = f(t) - \prod_{k=1}^{n}(t - a_k)$et choisir A tel que $g(x) = 0$

18. Pour tout entier$n$et réel x on pose $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + . + nx^n - 1$

- **a**. montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet un solution unique que l'on notera x_n
- **b**. calculer $f_{n+1}(x_n)$ en déduire que(x_n) est décroissante puis qu'elle converge
- **c**. montrer que pour x différent de 1 on a :$f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^{-2}} - 1$
- **d**. calculer x_1, puis en déduire les limites des suites $(x_n^n), (nx_n^n), (x_n)$.

19. *DS* 99-2000

Pour $n \geq 3$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = x - nln(x)$.

- **a**. étudier les variations de f_n en déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et $v_n$tels que : $0 < u_n < n < v_n$
  on se propose dans la suite de chercher un équivalent simple de u_n et v_n quand $n \to +\infty$.
- **b**. montrer que $1 < u_n < e$
- **c**. calculer $f_n(u_{n+1})$ en déduire que (u_n) est monotone puis qu'elle converge vers 1.
- **d**. montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$ en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.
- **e**. calculer $lim(v_n)$.
- **f**. calculer $f(nln(n))$ puis montrer que $nln(n) < vn$ pour $n \geq 3$.
- **g**. pour $x > 0$ on pose $g(x) = x - 2ln(x)$ étudier le signe de $g$en déduire que : $n > 2ln(n)$.
- **h**. en déduire le signe de $f_n(2nln(n))$ puis établir que $nln(n) < vn < 2nln(n)$.
- **i**. conclure que $v_n \sim nln(n)$

20. *DS* 2000-2001

On pose $x_0 = \frac{3}{2}, x_{n+1} = x_n(2 - \ln(x_n)), \forall n \in IN$

- **a**. Montrer que (x_n) est bien definie.
- **b**. Montrer que (x_n) est croissante majorée par e.
- **c**. En deduire que (x_n) est convergente , preciser sa limite.
- **d**. Montrer que : $\forall (x,y) \in [1,e]^2 : |\ln(x) - \ln(y) - \frac{y-x}{x}| \leq \frac{(y-x)^2}{8}$
- **e**. En deduire que : $\forall n \in IN, |x_{n+1} - e| \leq \frac{3}{8}|x_n - e|^2$
- **f**. En deduire les 5 chiffres aprés la virgule de e