Série 10 : *Fonctions Convexes*

Vendredi le 09 Janvier 2004

Exercice 1:

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 2:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :soit f est croissante sur $\mathbb{R}$,soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$,soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3:

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ affine. On suppose :

$$\forall\ x > 0,\ f(x) \leq g(x), f(1) = g(1). Montrer : f = g$$

Exercice 5:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$.Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

Exercice 6:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

Exercice 7:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \geq 0$, $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$.

1. Etudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\dfrac{f(x)}{x}$.
2. Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.

Exercice 8:

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x,y\in[a,b],\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.Montrer que f est convexe.

Exercice 9:

Soit $f:[a,b]\longrightarrow[c,d]$ convexe, bijective, croissante. On pose :

$$a\leq u_0\leq v_0\leq b,\quad u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2},\quad v_{n+1}=f^{-1}\left(\frac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 10:

Soit $n\geq 3$ et $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier.

Exercice 11:

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$. Montrer que : ($\ln f$ est convexe) $\Longleftrightarrow$ ($\forall\,\alpha>0,\ f^\alpha$ est convexe).

Exercice 12:

1. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ convexe dérivable.Montrer que $p=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-xf'(x))$ existe.
2. On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x)-xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.
3. Montrer alors que $f(x)-mx-p\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$.

Exercice 13:

Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x)\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}f(0)$.Montrer qu'il existe $c\in]0,+\infty[$ tel que $f''(c)=0$.

Exercice 14:

1. Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ concave.Montrer que la fonction $x\longmapsto\dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall\,x,y\geq 0,\ f(x+y)\leq f(x)+f(y)$.

Exercice 15:

1. Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.Montrer que : $\forall\,x\geq 1,\ f(x+1)-f(x)\leq f'(x)\leq f(x)-f(x-1)$.
2. On pose : $u_n=f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(n)-f(n)v_n=f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(n)-f(n+1)$. Montrer que ces suites convergent.
3. On prend $f(x)=\ln x$. Soit $\gamma=\lim_{n\to\infty}u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc