MPSI 1

CPGE Agadir

Feuille N°1

Théorie des ensembles
Samedi Le : 14-09-2001

Exercice 1 :

Soit E un ensemble non vide , pour toute partie A de E on associe l'application notée 1_A définie de E vers $\{0,1\}$ par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, $1_A(x) = 0$ sinon.

1. trouver 1_E et $1_\emptyset$.
2. soient A et B deux parties de E montrer que : $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$, $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$.
3. soient A et B deux parties de E,exprimer 1_{A^C} et $1_{A\Delta B}$ en fonction de 1_A et 1_B
4. montrer que l'application $\varphi\ P(E) \to \mathcal{F}(E,\{0,1\})$ est injective.
5. en déduire que si A, B *et* C sont trois parties de E alors : $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$, on dit alors que Δ est associative .

Exercice 2 :

soit E un ensemble non vide et$f : E \longrightarrow E$ une application .

Définition : une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$.

1. montrer que toute réunion ou intersection d'une famille quelconque (finie ou non) de parties de E toutes stables par f est aussi stable par f.

2. soit $A \in P(E)$ on pose $D_A = \{X \in P(E) \,/\, A \subset X \text{ et } X \text{ stable par } f \ (*)\}$

2.1) montrer que $D_A \neq \emptyset$.

2.2) on note par $A*$l'intersection de toutes les parties qui vérifient (*) montrer que $minD_A = A*$ (NB : la relation d'ordre considérée est l'inclusion) .

3. avec les notation précédentes montrer que :

3.1. "$A \in P(E)$ et A est stable par $f \Rightarrow A* = A$

3.2. "$(A,B) \in P(E)xP(E)\ A \subset B \Rightarrow A* \subset B*$

3.3. ”$(A,B) \in P(E)xP(E)$ on a :$(A \cup B) * = A * \cup B *$
3.4. ”$(A,B) \in P(E)xP(E)$ on a : $(A \cap B) * \subset A * \cap B *$.
3.5. ”$(A,B) \in P(E)xP(E)$ on a : $D_{A\cup B} = D_A \cap D_B$.
3.6. ”$(A,B) \in P(E)xP(E)$ on a : $D_{A\cap B} = D_A \cup D_B$.

Exercice 3 :

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F
1. montrer que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$
2. montrer que $ff^{-1}(B) \subset B$.
3. montrer que $f^{-1}f(A) \subset A$
4. quand est ce qu’on a égalité?

Exercice 4 : DS 1 (2001-2002)

Montrer que l’application $f : INxIN \to IN$ définie par $f(n,m) = 2^n(2m+1)$est injective est -elle surjective ?

Exercice 5 : Contrôle 1 (2001-2002)

Soient E, F et G trois ensembles non vides ;$f : E \to F, g : F \to G$.
Montrer que : gof surjective et g injective $\Rightarrow$ $f$surjective

Exercice 6:

Soit E ensemble , A et B deux parties fixes de E, on définit l’application

$g : P(E) \to P(A)xP(B)$

$X \to (X \cap A, X \cap B)$

1. donner une CNS pour que g soit injective.
2. donner une CNS pour que g soit surjective.
3. donner une CNS pour que$g$soit bijective.

Exercice 7 :

Soeint E,F,G des ensembles , $f :: E \to F, g : F \to G, h : G \to E$.
1. Montrer que : gof et hog bijectives $\Rightarrow$ g et h bijectives.
2. Montrer que : $gofoh$ et$fohog$ injectives et $hogof$ surjectives$\Rightarrow$ g et h bijectives.
3. Montrer que : $gofoh$ et $fohog$ surjectives et $hogof$ injectives$\Rightarrow$ g et h bijectives.