Série 1 : *Théorie des ensembles*

Lundi le 15 Septembre 2003

Exercice 1:

Soit E un ensemble non vide , pour toute partie A de E on associe l'application notée 1_A définie de E vers $\{0,1\}$ par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, $1_A(x) = 0$ sinon.

1. trouver 1_E et $1_\emptyset$.

2. soient A et B deux parties de E montrer que : $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$, $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$.

3. soient A et B deux parties de E,exprimer $1\ _{A^C}$ et $1_{A\Delta B}$ en fonction de 1_A et 1_B

4. Soient A et B deux parties de E montrer que $1_A = 1_B \iff A = B$ .En déduire que l'application $\varphi\ P(E) \to F(E,\{0,1\})$ est injective.

5. en déduire que si $A, B\ et\ C$ sont trois parties de E alors : $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$, on dit alors que Δ est associative .

6. Soeint A,B,C troix parties de E .A-t-on : $A\triangle(B\cap C) = (A \triangle B)\cap(A \triangle B), A\triangle(B\cup C) = (A \triangle B)\cup(A \triangle B)$ .Que pouvez vous dire de la distibutivité de $\triangle$ par rapport a $\cap$ et $\cup$?.

Exercice 2:

soit E un ensemble non vide et$f : E \longrightarrow E$ une application .

Définition : une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$.

1. montrer que toute réunion ou intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties de E toutes stables par f est aussi stable par f.

2. soit $A \in P(E)$ on pose $\triangle_A = \{X \in P(E)\ /\ A \subset X\ et\ X\ stable\ par\ f\quad (*)\ \}$

2.1 : montrer que $\triangle_A \neq \emptyset$.

2.2 : on note par A^* l'intersection de toutes les parties qui vérifient (*) montrer que $min\triangle_A = A^*$ (NB : la relation d'ordre considérée est l'inclusion) .

3. avec les notations précédentes montrer que :

3.1 : ∀A∈ $P(E)$: A^* est stable par f .

3.2 : ∀A∈ $P(E)$: A est stable par $f \Longrightarrow A^* = A$

3.3 : ∀(A,B)∈ $P(E)$x$P(E)$ on a : $A \subset B \Longrightarrow A^* \subset B^*$

3.4 : ∀(A,B)∈ $P(E)$x$P(E)$ on a :$(A\cup B)^* = A^* \cup B^*$

3.5 : ∀(A,B)∈ $P(E)$x$P(E)$ on a : $(A\cap B)^* \subset A^* \cap B^*$.

Exercice 3:

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F

1. montrer que $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$
2. montrer que $f(f^{-1})(B) \subset B$ et que si f est surjective on a égalité.
3. montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$ et que si f est injective on a égalité.

4.montrer que f injective $\Longrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

4.montrer que f surjective $\Longrightarrow f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$.

Exercice 4:

Soit f l'application définie par : f : $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n,m) = 2^n(2m + 1).\forall(n,m) \in \mathbb{N}$

1. Montrer que f est injective.On pourra utilier le thóréme de Gauss.
2. Montrer que f est surjective.On pourra utilier la décomposition d'un entier naturel en puissance de nombres premiers.

DS 1 (2001-2002)

Exercice 5:

Soient E, F et G trois ensembles non vides ; $f : E \to F, g : F \to G$.

Montrer que : gof surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective

Contrôle 1 (2001-2002)

Exercice 6:

Soit E ensemble , A et B deux parties fixes de E, on définit l'application suivante :

g :P(E)$\to$ $P(A)$ x $P(B)$

$X \to (X \cap A, X \cap B)$

1. Montrer pour que g est surjective $\Leftrightarrow$ A$\cap B = \emptyset$.
2. Montrer pour que g est injective $\Leftrightarrow$ A $\cup B = E$.
3. donner une CNS pour que g soit bijective puis exprimer $g^{-1}(X,Y)$ pour tout $(X,Y) \in P(A)$ x B.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc