Série 1 : *Théorie des ensembles*

Lundi 20 Septembre 2004

Exercice 1:

Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application. Une partie A de E est dite stable par f si $(A) \subset A$.

1. Montrer que toute réunion ou intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties de E toutes stables par f est aussi stable par f.
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose : $\triangle_A = \{X \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $A \subset X$ et X stable par $f\}$.
2. Montrer que $\triangle_A \neq \emptyset$.
3. On note par A^* l'intersection de toutes les parties qui vérifient (*) montrer que $\min \triangle_A = A^*$ (NB : la relation d'ordre considérée est l'inclusion) .
4. Avec les notations précédentes montrer que :
   - $\forall A \in \mathcal{P}(E)$: A^* est stable par f .
   - $\forall A \in \mathcal{P}(E)$: A est stable par $f \Longrightarrow A^* = A$. En déduire que $A^{**} = A^*$.
   - $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \text{x} \mathcal{P}(E)$ on a : $A \subset B \Longrightarrow A^* \subset B^*$.
   - $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \text{x} P(E)$ on a : $A^* \cup B^* \subset (A \cup B)^*$.
   - $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \text{x} P(E)$ on a : $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$.

Exercice 2:

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F.

1. Montrer que $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et que si f est surjective on a égalité.
3. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que si f est injective on a égalité.
4. Montrer que f injective $\Longrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
5. Montrer que f surjective $\Longrightarrow \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Exercice 3:

Soit f l'application définie par : $f : \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où $f(n, m) = 2^n(2m+1).\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$.

1. Montrer que f est injective. On pourra utilier le thóréme de Gauss.
2. Montrer que f est surjective. On pourra utiliser la décomposition d'un entier naturel en puissance de nombres premiers.

DS 1 (2001-2002)

Exercice 4:

Soient E, F et G trois ensembles non vides ; $f : E \to F, g : F \to G$.

Montrer que : gof surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective

Contrôle 1 (2001-2002)

Exercice 5:

Soit E ensemble, A et B deux parties fixes de E, on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : P(E) &\to P(A) \times P(B) \\ X &\to (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1. Montrer pour que g est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
2. Montrer pour que g est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.
3. Donner une CNS pour que g soit bijective puis exprimer $g^{-1}(X, Y)$ pour tout $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 6:

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to E$.

1. Montrer que : gof et hog bijectives $\Rightarrow$ g et h bijectives.
2. Montrer que : $gofoh$ et$fohog$ injectives et $hogof$ surjectives$\Rightarrow$ g et h bijectives.
3. Montrer que : $gofoh$ et $fohog$ surjectives et $hogof$ injectives$\Rightarrow$ g et h bijectives.

Exercice 7:

Soit $f : E \to F$ une application donnée. On définit l'application φ par : $\varphi : \begin{array}{c} E \to F \\ A \mapsto f(A) \end{array}$.

Montrer que f bijective $\Leftrightarrow$ φ bijective.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca