MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°11

Lundi le:2-Décembre-2002

Fonctions usuelles

1. Enoncer et démontrer la formule de Machin :

2. Résoudre les systèmes suivants :où a, b sont deux nombres réels.

a. $\begin{cases} ch(x)+ch(y)=a \\ sh(x)+sh(y)=b \end{cases}$

b. $\begin{cases} ch(x)+sh(y)=a \\ sh(x)+ch(y)=b \end{cases}$

c. Déterminer les couples$(x,y)\in IR^2$ tel que :$arcsin(sin(x))+arccos(cos(y))=x+y$

3. Résoudre les équations:

a. $2\arcsin(x)=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$

b. $arctan(\frac{tan(2x)}{2})+arctan(cotan^2(x))=\pi-arctan(cotan(a))$ où $a\in]0,\pi[$.

c. $\lambda sh(x)-x(ch(x)ch(a)-1)=0$ où $a\in IR^{*+}, \lambda\in IR^{+}$

d. $arctan(\frac{1}{2})+arctan(\frac{1}{4})=arctan(x)$

e. $2arctan(2)-arctan(\frac{1}{4})=arctan(x)$

f. $arccos(sin(x))+arcsin(cos(x))=1$

g. $arcsin(1)=arcsin(\frac{5}{13})+arcsin(x)$

h. $arctan(2x)+arctan(x)=\frac{\pi}{4}$

i. $arcsin(x)+arcsin(2x)=arccos(x)+arccos(2x)$

4. Etudier les fonctions definies par

a. $f: x\rightarrow \arccos\left(\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b. $f: x\rightarrow \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$

5. Déterminer les points d'inflexion (où f''change de signe)de $f: x\rightarrow a^{a^x}$,discuter leurs existence et chercher leur lieu quand a varie dansIR^{*+}

6. Montrer que$\forall(x,y)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a : $Arctan(x)+Arctan(y)=Arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+p$ où $p$est un réel a déterminer

7. On considère la fonction : $f(x)=ch\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

a. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

b. La courbe coupe l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses en un point A, calculer l'abscisse de A.

8. Simplifier les expressions suivantes :

a. $\ln\left(\sqrt{\frac{1+th(x)}{1-th(x)}}\right)$.

b. $\frac{1+th^2(x)}{1-th^2(x)}$

9. Soit $x\in]0,1]$. On pose $y=\arccos(x)$

a. Exprimer en fonction de x : $cos(y), sin(y), tan(y)$.

b. En déduire que $arccos(x)=\arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$.

c. Si $x=0$, quelle est la valeur de $\arccos(x)$?.

10. On considère la fonction :$f(x) = arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2arctan(x)$.

- **a**. Quel est l'ensemble de définition de f.
- **b**. Calculer f'.
- **c**. En déduire une expression plus simple de f sur chacun des intervalles où le raisonnement est valable.
- **d**. Dessiner la représentation graphique de f.

11. Soit la fonction $y = sin(nArcsinx)$. Montrer que pour tout n cette fonction vérifie l'équation différentielle :$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$

- **a**. Calculer $tan(arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{5}) + arctan(\frac{1}{8}))$
- **b**. Quelle est la valeur de $arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$
- **c**. En déduire que $arctan(\frac{1}{2}) \leq \frac{\pi}{6}$

MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°11

Mercredi le:4-Décembre-2002

Fonctions et suites a valeurs complexes

1. DS 99-20001.

Soit $a \in C\backslash\{IR\}$

- **a**. Montrer qu'il existe un unique complexe b de partie relle strictement positive tel que $b^2 = a$.
- **b**. On pose $P^+ = \{z \in C \text{ tel que } Re\left(\frac{z}{b}\right) > 0\}, f(z) = \frac{z+\frac{a}{z}}{2})$ montrer que P^+ est stable par f.
- **c**. On pose $z_0 = a, z_{n+1} = f(z_n), wn = \frac{z_n - b}{z_n + b}$ montrer que $(z_n), (w_n)$ sont bien définies.
- **d**. Exprimer w_n en fonction de w_{n-1} en déduire l'expression de w_n en fonction de a, b, n.
- **e**. Montrer que $|w_0| \leq 1$, en déduire la limite de w_n et celle de v_n

2. Montrer que : $\lim(1 + i\frac{a}{n})^n = e^{ia}$

3. Soit $\begin{array}{l} f : IR \to C \\ \quad t \mapsto e^{it} \end{array}$

- **a**. Montrer que f est de classe C^1 sur IR calculer sa dérivée
- **b**. Soit $(a,b) \in IR^2$ tel que $a \leq b$ on suppose qu'il existe $a < c < b$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ montrer que ça mène a une contradiction
- **c**. conclusion?