Série 11 : *Espaces vectoriels*

Vendredi le 16 Janvier 2004

Exercice 1:

Montrer qu'un $\mathbb{C}$-ev est aussi un $\mathbb{R}$-ev,la réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2:

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ fixé ;les ensembles suivants , sont-ils des espace vectoriel ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = d\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + byx + cy^2 = d\}$

Exercice 3:

Montrer que les familles $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}, \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\}$ sont libres dans $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-ev .

Exercice 4:

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé ,$f_1 : x \to \sin(x), f_2 : x \to \sin(x + a), f_3 : x \to \cos(x)$ montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est liée dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que les familles suivantes $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$f_k(x) = x^k ; f_k(x) = e^{kx} ; f_k(x) = \cos(kx) ; f_k(x) = \cos^k(x)$$

Exercice 6:

Soient E ev et $f, g : E \to E$ linéaires montre que : $f(ker(gof)) = ker(g) \cap Im(f)$

Exercice 7:

Soit $T > 0$, on pose $E = \{f \in \wp^\infty(\mathbb{R}); f : T - priodique$

1. Montrer que la primitive d'une fonction T-périodique , f,est aussi T-périodique ssi
$$\int_0^T f(x)dx = 0$$
2. Soit $u : E \to E$ definie par $u(f) = f"$ montrer que : $E = ker(u) \oplus Im(u)$

Exercice 8:

Soit E ev et $f, g : E \rightarrow E$ linéaires telles que f est une bijection et :

$$fog = gof, g^4 = 0$$

1. Montrer que : $(f^{-1}og)^4 = 0$.
2. Montrer que : $id_E - f^{-1}og$ isomorphisme .

   Indication :on pourra utiliser l'égalité : $id_E - u^n = (id_E - u)\sum_{k=0}^{n-1} u^k, \forall u \in \pounds(E)$.
3. Montrer que : $f + g$ isomorphisme .

Exercice 9:

Soient E, F deux espaces vectoriels non nuls, $f : E \rightarrow F$ lineaires telles que : $\forall g \in \pounds(F, E);$ on ait $fogof \neq 0$ .Montrer que f est bijective.

Exercice 10:

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes de E. Montrer que :

$$gof = 0 \Longleftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$$

Exercice 11:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$$

Donner une condition necessaire et suffisante sur f pour qu'en dimension finie on ait :

$$E = Im(f) \oplus Ker(f)$$

Exercice 12:

1. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}, F = \{(a, 2a, 4a); a \in \mathbb{R}\}$ .Montrer : $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
2. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $p((x, y, z))$ la projection sur E parallélement à F et $s((x, y, z))$ la symétrie par rapport à E parallélement à F .

Exercice 13:

On considère p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E .

1. Montrer que : $poq = q \Longleftrightarrow Im(q) \subset Im(p)$.
2. Montrer que : $p + q$ est un projecteur $\Longleftrightarrow poq + qop = 0, poq = 0, qop = 0$ et que dans ce cas

$$Im(p) \cap Im(q) = \{0_E\}; Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$$

3. On suppose dans cette question que : $poq = 0$ .Montrer que :

$$r = p + q - qop \quad projecteur; Ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q); Im(r) = Im(p) \oplus Im(q)$$

Exercice 14:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \pounds(E)$. Montrer que f est une homothétie ssi pour tout x dans E , $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 15:

Soit $f \in \pounds(E)$ tel que : $f^2 + f = 0$ montrer que : $Ker(f) \oplus Ker(f + id) = E$

Exercice 16:

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, x + y + 2z, 3x + z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .f est-elle injective ?surjective ?
3. Montrer que $Ker(f)$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur, et trouver une partie génératrice de $Im(f)$ de cardinal 2.

Exercice 17:

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires .

1. Montrer que $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$
2. Discuter les cas d'égalité .

Exercice 18:

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires telles que $lm(u) + lm(v) = Ker(u) + Ker(v) = E$ .Montrer que les deux sommes sont directes .

Exercice 19:

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev de dimensions finies et $u : E \to F, u : F \to E$ linéaires telles $vouov = v, uovou = u$ .Montrer que $E = lm(v) \oplus Ker(u); rg(u) = rg(v)$.

Exercice 20:

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \pounds(E, F)$.

1. Montrer que si H est un sev de E, alors $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap ker(f))$.
2. Montrer que si K est un sev de F, alors $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \Im m(f)) + \dim(Ker(f))$.

Exercice 21:

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 22:

Soit $f \in \mathcal{L}E$ tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer que $rg(f) + rg(f^2) \leq \dim(E)$.
2. Montrer que $2rg(f^2) \leq rg(f)$.*(Appliquer le théorème du rang à $f_{|\Im m(f)}$)*.

Exercice 23:

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = Ker(f) \oplus \Im m(g)$.
2. Montrer que $f(\Im m(g)) = \Im m(f)$.

Exercice 24:

On considère que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la base $1, i$

1. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ peut se mettre sous la forme :

$$f(z) = az + b\overline{z} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

2. Montrer que f bijectif $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$.

Exercice 25:

Permutation de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}$ sous corps de $\mathbb{C}$ .Soit $\sigma \in S_n$ (groupe symétrique) et

$$\begin{aligned} f_\sigma : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \ldots x_n) &\mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

On munit $\mathbb{K}^n$ de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit φ un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Montrer que la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est invariante par φ (étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi((e_i + e_j)^2)$).
   (b) En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.
3. Montrer que $\{0\}$, $\mathbb{K}(1, \ldots, 1)$, $\{(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $x_1 + \ldots x_n = 0\}$ et $\mathbb{K}^n$ sont les seuls sev stables par tous les endomorphismes f_σ.

Exercice 26:

Commutants itérés :Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $C_i = Ker(\varphi^i)$ ($C_0 = 0$, C_1 est le commutant de u, C_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1. Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
2. Montrer que $C = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} C_i$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ appelée *Commutant* de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 27:

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimensuin finie et E_1, E_2 deux sev de E supplémentaires, soit f un isomorphisme de E_2 dans E_1 et g un endomorphisme de $E_2, \forall x \in E, \exists! x_1 \in E_1, \exists! x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ on pose alors $h(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + g(x_2)$

1. Montrer que h est un automorphisme de E .
2. Soit λ une valeur propre de h et $x = x_1 + x_2$ un vecteur propre associé à λ ,avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$
   (a) Montrer que $x_1 \neq 0_E, x_2 \neq 0_E, \lambda \neq 0$.
   (b) Montrer que x_2 est un vecteur propre de g (préciser pour quelle valeur propre il est associé) .
3. Soit μ une valeur propre de g, y un vecteur propre associe, en déduire une valeur propre de h , et un vecteur propre associe ,z ,(à exprimer en fonction de y, μ) .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Et $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille de vecteurs propres de g tous associes à μ et $(z_j)_{1\leq j\leq n}$ construits avec la méthode de (c) , montrer que $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ libre $\Rightarrow (z_j)_{1\leq j\leq n}$ libre .

DS (2000-2001)

Exercice 28:

$\forall x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = e^x, g(x) = e^{2x}, h(x) = e^{x^2}, \zeta = Vect(\{f, g, h\})$.

Soit $\varphi : \zeta \to \zeta$ définie par : $\forall F \in \zeta : \varphi(F) = af + bg + ch$ tel que :

$$a = \frac{2F(0)}{e-1} + F'(0) + \frac{2F(1)}{e(e-1)}, b = -\frac{F(0)}{e-1} - \frac{F(1)}{e(e-1)}, c = \frac{(e-2)F(0)}{e-1} - F'(0) - \frac{F(1)}{e(e-1)}$$

Soit $\psi : \zeta \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall F \in \zeta : \psi(F) = (F(0), F'(0), F(1))$.

Soit $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \theta(a, b, c) = (a, b, -c)$.

1. Montrer que : $\{f, g, h\}$ est libre dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,en déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\zeta)$.
2. Montrer que : ψ est un isomorphisme .
3. Montrer que : $\varphi = \psi^{-1} o \theta o \psi$.
4. Calculer $\varphi o \varphi$, ,en deduire la nature de φ .
5. Montrer que : $\forall F \in \zeta : \varphi(F) = F \Leftrightarrow F(1) = 0$.
6. En déduire une base de $P = \{F \in \zeta / \varphi(F) = F\}$
7. Trouver une base de $D = \{F \in \zeta / \varphi(F) = -F\}$.
8. Reconnaitre φ .

DS (2000-2001)

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc