Série 12 : *Polynomes*

Mercredi le 18 Février 2004

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Calculer le reste de la division euclidienne de :

1. X^n par $(X-1)(X-2)$ et par $(X-1)^2$.
2. $(X\cos(\theta)+\sin(\theta))^n$ par X^2+1, $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 2:

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynome $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 ?

Exercice 3:

Chercher les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $4P(X) = (X-1)P'(X) + P"(X)$

<u>Indication</u> : Calculer le degré d'un tel polynôme P , puis les valeurs prises en 0 par ses dérivées successives,puis utiliser la formule de Taylor .

Exercice 4:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

1. $z^5 + 6z^3 - 2z^2 + 5z - 10 = 0$, sachant qu'il y a deux racines dont le produit est égal à 5.
2. $6x^6 - 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$,sachant que 1 et -1 sont racines puis poser $y = x + \frac{1}{x}$.

Exercice 5:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ donnés.Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = e^{2ina}$ .En déduire $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 6:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de dans $\mathbb{C}[X]$ de $\sum\limits_{k=0}^{n} X^k$ .En déduire $\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

Exercice 7:

Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ ainsi que leurs multiplicités dans le polynôme : $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.

Exercice 8:

Soit $n \in N^*$ .Calculer le quotient de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 9:

Déterminer tous les polynômes solutions des équations différentielles suivantes :

1. $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$
2. $XP"(X) - (X+m)P'(X) + nP(X) = 0$
3. $(1+X)2P"(X) - (2X+1)P'(-X) + 2P(X) = 0$

Exercice 10:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Déterminer la multiplicité de la racine 1 dans le polynôme suivants :
$X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1; X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$

Exercice 11:

Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :
$X^6 + 1; X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 12:

Critère *d'Eisenstein* d'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$:Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel qu'il existe p nombre premier vérifiant :p divise a_k pour $0 \leq k \leq n-1$ et p ne divise pas a_n et p^2 ne divise pas a_0 .

1. Montrer que le polynôme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. *Application* : Montrer que les polynômes suivant sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$: $X^p + p$ où p est premier et $-3X^{14} + 2X^8 + 8X^3 - 26X^2 + 6$.

Exercice 13:

Polynomes Particuliérs : *Dans tout l'énonce n désigne un entier naturel fixe.*

1. *Polynômes d'interpolation de Lagrange :*

   Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts , on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - r_i}{r_k - r_i}$

   (a) calculer $L_k(r_j)$ pour $1 \leq j, k \leq n$.

   (b) En déduire que la famille $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   (c) Exprimer tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base .

   (d) En déduire que $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpole f aux point $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ càd $f(r_k) = P(r_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$

2. *Polynômes d'interpolation de Hermite :*

   Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts ,et
   $\varphi : \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par : $\varphi(P) = (P(r_1), P'(r_1), .., P(r_n), P'(r_n))$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme

(b) En déduire qu'il existe un unique polynôme qui interpole f et dont la dérivée interpole f' aussi aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$

3. *Polynômes de Legendre* :$P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$

   (a) Précisez les racines de $(X^2-1)^n$ ainsi que leurs multiplicités.

   (b) Montrer par récurrence sur $0 \leq k \leq n$ que $((X^2-1)^n)^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$

   (c) En déduire que $((X^2-1)^n)^{(n)}$ admet exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.

4. *Polynômes de tchebechev* : $T_n(X) = cos(n\arccos(X))$.

   (a) Montrer que T_n est un polynôme de degré n , préciser son coefficient dominant

   (b) Montrer que $T_n(cos(t)) = cos(nt)$ pout tout réel t

   (c) En déduire les racines de T_n

   (d) Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}

Exercice 14:

Soit $a, b \in \mathbb{K},\ a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Exercice 15:

Formule de Van der Monde : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0,n]]$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de :$\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\big(X^n(1-X)^n\big)^{(n)}$.
3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.

Exercice 16:

On note $U_p = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $\quad p \in \mathbb{N}$, et $\Delta :\ \begin{array}{c} K[X] \longrightarrow K[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1)-P(X) \end{array}$

1. Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3. En déduire que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_n[X]$, ona $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :
   $\big(\forall\ n \in \mathbb{Z}$, on a $P(n) \in \mathbb{Z}\big) \Rightarrow \big($ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières$\big)$.
5. Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

FIN