Série 13 : *Développements Limités*

Mercredi le 25 Février 2004

Exercice 1:

1. Donner le $DL_{10}(0)$ de : $f(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$
2. En déduire le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation : $a+2b+5c=10$

Exercice 2:

Calculer les limites eventuelles suivantes :

$\lim\limits_{0}\left(\frac{2(chx-1)shx-x^3\sqrt[4]{1+x^4}}{sh^5(x)-x^5}\right)$; $\lim\limits_{+\infty}\left(x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})\right)$; $\lim\limits_{+\infty}\left(ch(\sqrt{x^2+1})-ch(\sqrt{x^2-1})\right)$;

$\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(x)e^{\frac{1}{1-\sin(x)}}\right)$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}\left(\tan(x)\left(1-tan(\frac{x}{2})\right)\right)$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}\left((1-\frac{2x}{\pi})\tan(x)\right)$

Exercice 3:

Donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport a la courbe de la fonction : $f(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}$

Exercice 4:

Etudier les branches infinies en $+\infty$ ainsi que leurs position par rapport a la courbe de la fonction définie par : $f(x)=e^{\frac{-1}{x}}\frac{x^2-x+2}{x+1}; g(x)=e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^3}{x-1}$

Exercice 5:

Déterminer la partie principale en 0 quand elle existe de : $\cos(x)^{\sin(x)}; \frac{1}{\tan^2(x)}-\frac{1}{x^2}$

Exercice 6:

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :

$n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right); n^2\left(\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln(n)\right)$.

Exercice 7:

Donner un $DAS_n(+\infty)$ de $f(x)$ si :

$n=2, f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}; n=3, f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$.

Exercice 8:

DS 98-99 : Soit $\begin{array}{c} f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^{1+\frac{1}{x}}\end{array}$

1. Etudier la continuité et la derivabilite f en 0 .

2. Etudier en $+\infty$ les branches infinies .
3. Donner un $DL_3(1)$;en déduire l'équation de la tangente en 1 ainsi que sa position par rapport à la courbe .
4. Dessiner la courbe

Exercice 9:

$$DS\ 98\text{-}99 \text{ : Soit : } \begin{array}{c} f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{array}{c} \frac{x+1}{x-1}\frac{\ln(x)}{2} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{array} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue en 1 .
2. Montrer que f est monotone sur chacun des intervalles : $]0,1[\,;]1,+\infty[$.
3. Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f'(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$.
4. Calculer $\lim\limits_{1} f'(x)$;en deduire que f est de classe $\wp^1$ .Dessiner la courbe .

Développements limités usuels en 0

$DL_n(0)\quad e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$DL_3(0)\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
$DL_n(0)\quad \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$
$DL_n(0)\quad \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$
$DL_n(0)\quad \ln(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	$DL_3(0)\quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_n(0)\quad \ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_{2n+1}(0)\quad \sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)\quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)\quad \sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)\quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)\quad \cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)\quad \cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)\quad sh(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)\quad sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)\quad sh(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)\quad sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)\quad ch(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)\quad ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)\quad ch(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)\quad ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$DL_n(0)\quad (1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{(k)!} x^k + o(x^n)$	$DL_2(0)\quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$
$DL_3(0)\quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$DL_2(0)\quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc