MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°14

Mercredi le:18-Décembre-2002

Developpements limités

1.

a. Donner le $DL_{10}(0)$ de : $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$

b. En déduire le nombre de solutions dans IN de l'équation : $a + 2b + 5c = 10$

2. Calculer:

a. $\lim\limits_{0} \frac{2(chx-1)shx-x^3\sqrt[4]{1+x^4}}{sh^5(x)-x^5}$

b. $\lim\limits_{0} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{cotan(x)}$

3. Donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport a la courbe de la fonction:$f(x) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{ln(1+x)}$

4.

5. Etudier les branches infinies en $+\infty$ ainsi que leurs position par rapport a la courbe de la fonction définie par :

a. $f(x) = e^{\frac{-1}{x}} \frac{x^2-x+2}{x+1}$

b. $g(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{x^3}{x-1}$

6. Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de :

a. $x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$

b. $ch(\sqrt{x^2+1}) - ch(\sqrt{x^2-1})$

7. Déterminer la partie principale en 0 quand elle existe de :

a. $cos(x)^{sin(x)}$

b. $\frac{1}{tan^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

8. Déterminer les limites éventuelles des suites de termes général :

a. $n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right)$

b. $n^2(ln(n+1) + ln(n-1) - 2ln(n))$

9. Déterminer les limites éventuelles en $\frac{\pi}{2}$ de :

a. $cos(x)e^{\frac{1}{1-sin(x)}}$

b. $tan(x)\left(1 - tan(\frac{x}{2})\right)$

c. $(2 - \frac{2x}{\pi})tan(x)$

10. Donner un $DAS_n(+\infty)$ de$f(x)$

a. $n = 2, f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}$

b. $n = 3, f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$

11.

a. montrer que pour tout $n > 2$ l'équation : $x^n - nx + 1 = 0$ admet une solution unique dans $]0,1[$que l'on notera x_n

b. étudier la suite (x_n) en déduire qu'elle converge vers une limite que l'on notera L

c. déterminer un équivalent simple de x_n

12. Soit $n > 2, x_n$ la plus petite solution strictement positive de l'équation $tan(nx) = x$, déterminer un DAS_3 de x_n par rapport a l'infiniment petit $\frac{1}{n}$

13.

a. Soit $n > 2$, Montrer que l'équation : $xtan(x) = 1$ admet une seule solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$ qu'on notera x_n

b. déterminer un DAS_3 de x_n par rapport a l'infiniment petit $\frac{1}{n}$

14. *Méthode de Newton* (DS 2000-2001)

Soit $(a,b) \in IR^2, (a < b)$ et f de classe C^2 convexe sur $[a,b]$.

a. montrer que si l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 3 solutions alors f est nulles entres ses solutions.

b. on suppose dans la suite que $f' > 0$ sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$ montrer alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution que l'on notera l.

c. on pose $x_0 = b, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ montrer que le point $M(x_{n+1}, 0)$ est l'intersection de l'axe (ox) avec la tangente a la courbe de f au point $N(x_n, f(x_n))$.

d. Montrer que (x_n) decroissante vers l

e. montrer que $|x_{n+1} - l| \leq k|x_n - l|^2$ pour tout $n \in IN$ (avec $k = \frac{\sup_{[a,b]}(|f''|)}{\inf_{[a,b]}(|f'|)}$)(*indication*:on pourra utiliser la formule de *Taylor* a l'ordre 2).

f. en déduire une majoration de $|x_n - l|$ en fonction de n, a, b.

g. en prenant $f(x) = ln(x) - 1$ sur$[2,3]$ donner une valeur approchée de e a 10^{-4} près

15. DS 98 – 99

Soit $\begin{array}{l} f : [0,+\infty[\to IR \\ \quad x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}} \end{array}$

a. Etudier la continuité et la derivabilite f en 0

b. Etudier en $+\infty$ les branches infinies

c. donner un $DL_3(1)$ en deduire l'equation de la tangente en 1 ainsi que sa position par rapport a la courbe

d. Dessiner la courbe

16. DS 98 – 99

$$f : [0,+\infty[\to IR$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}\frac{\ln(x)}{2} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue en 1

b. Montrer que f est monotone sur chaque intervalle $]0,1[,]1,+\infty[$

c. Montrer que pour $x \neq 1$ on a : $f'(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$

d. Calculer $\lim_{1} f'(x)$ en deduire que f est de classe $\wp^1$

e. Dessiner la courbe