MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°15

Vendredi le:20-Décembre-2002

Courbes Planes Paramétrées

1. Soit (γ) l'arc définie par le paramétrage suivant : $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-2t}{2t} \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (t \in IR)$

- **a**. Dresser le tableau de variation de (γ)
- **b**. Etudier le point stationnaire,preciser son type et un vecteur qui dirge la tangente
- **c**. Etudier les branche infinies
- **d**. Construire (γ)
- **e**. Soient $M_1 = M(t_1)$ et $M_2 = M(t_2)$ deux point de (γ) en lesquels les tangentes sont orthogonales et $P = (x,y)$ le point d'intersection de ces deux tangentes
  - **i**. Exprimer x,y en fonction de t_1,t_2.puis en fonction de $u = t_1 + t_2$
  - **ii**. reconnaître alors l'ensemble décrit par les points P

2. Déterminer une droite qui soit a la fois tangente et normale a (γ) : $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases} \quad (t \in IR)$

3. Soit (γ) l'arc définie par le paramétrage suivant : (γ) : $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (t \neq -1)$

- **a**. Montrer que 3 points de (γ) :$M(t_i)_{1\leq i\leq 3}$ sont alignés $\Leftrightarrow\ t_1t_2t_3 = -1$
- **b**. Chaque tangente a (γ) au point $M(t_i)$ recoupe (γ) en un point $M(u_i)$ montrer que $u_i = -\frac{1}{t_i^2}$
- **c**. En déduire que : $M(t_i)_{1\leq i\leq 3}$ sont alignés $\Leftrightarrow\ M(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ sont alignés

4. Construire les arcs géometriques définies par les paramétrages suivants apres avoir dresser le tableau des variations,etudier les points stationnaires et les branches infinies :

- **a**. $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t-t^3} \\ y(t) = \ln(1+t^2) \end{cases}$
- **b**. $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \frac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{cases}$
- **c**. $\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$
- **a**. Construire l'arc géometrique (γ) définie par le paramétrage suivant

$:\begin{cases} x(t) = \cos^2(t) \\ y(t) = \cos(t)(1+\sin(t)) \end{cases}$

- **b**. A tout point $M(t)$ de (γ) on associe $M' = M(t')$ de (γ) tel que $OM \perp OM'$, detérminer les coordonnées de $I = (x,y)$ milieu de $[M,M']$ en fonction de t
- **c**. Reconnaitre l'ensemble decrit par ces points I

5. Etudier les points stationnaires des arcs paramétrés définis par :

- **a**. $\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$
- **b**. $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \frac{t^3-1}{t^2+1} \end{cases}$

6. On considère l'arc géometrique (γ) défini par : $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$

- **a**. Dresser le tableau de variation de (γ)
- **b**. Etudier le point stationnaire,preciser son type et un vecteur qui dirge la tangente
- **c**. Etudier les branche infinies
- **d**. Construire (γ)
- **e**. Déterminer le point double
- **f**. Montrer qu'en ce point les deux tangentes sont orthogonales

7. *Etude d'une astroïde*:

On considère l'arc géometrique (γ) défini par : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ (*astroïde*:)

- **a**. montrer qu'on peut réduire l'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$, préciser les symétrie de l'arc
- **b**. soit t et u deux réels distincts , donner une *CNS* pour que les tangentes à (γ) aux points $M(t)$ et $M(u)$ soient orthogonales
- **c**. Soit $M'(t')$ le point de cette intersection, exprimer t' en fonction de t
- **d**. Reconnaitre l'ensemble decrit par les points P,cet ensemble s'appelle *courbe orthoptique de l'astroïde*