Série 15 : *Matrices*

Samedi le 13 Mars 2004

Exercice 1:

On considère m un nombre complexe non nul, et on pose : $A = \begin{bmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculer $(A+I_3)(A-2I_3)$ .En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I_3), C = -\frac{1}{3}(A-2I_3)$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: B^n, C^n.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver le résultat du 3) en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par : $(X+1)(X-2)$.

Exercice 2:

Calculer les puissances successives de $\begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{bmatrix}$, où a et b sont deux nombres complexes.

<u>Indication</u> : On pourra ecrire A sous la forme I+J où I et J sont deux matrices dont les puissances sont faciles à calculer .

Exercice 3:

Soit A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n, nilpotentes (ie telles qu'une de leurs puissances soit nulle), et qui commutent.

1. Montrer que $A+B, AB$ sont nilpotentes.
2. Montrer que $A-I_n$ est inversible, et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.
3. Inverser la matrice carré d'ordre $n \geq 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0.... & 0 \\ 0 & . & a & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & & . & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;$a \in \mathbb{C}$

   <u>Indication</u> : On pourra remarquer que $A - I_n$ est nilpotente

---

Exercice 4:

On considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3), e_2 = (1,1,1), e_3 = (1,3,4), f_1 = (1,2,4), f_2 = (1,-1,1), f_3 = (1,1,5)$ de $\mathbb{R}^3$ .Montrer que $B_1 = (e_1,e_2,e_3), B_2 = (f_1,f_2,f_3)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$, calculer les matrices de passage de B_1 à B_2 et de B_2 à B_1, et vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 5:

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ montrer que A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une projectiondont on precisera le noyau et l'image
2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur D parallelement à π où $D : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ $\quad \pi : x+y-z=0$
3. Soit P la matrice d'un projecteur sur un ev de dimension finie montrer que $rg(P) = Tr(P)$
   <u>Indication</u> : chercher une base où sa matrice s'exprime d'une façon simple .

Exercice 6:

1. Soit l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$
   $$P(X) \longmapsto XP'(X) - P(X)$$
   Déterminer $A = M_B(\Phi)$ où B la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $\lambda \in R$ calculer $rg\,(A - \lambda I_3)$ suivant les valeurs de λ
3. En déduire les valeurs propores de Φ .

Exercice 7:

$\underline{DS : 99\text{-}2000}$: Soit $\lambda \in \mathbb{R}, J\,(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & . & . & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & & 1 \\ . & 1 & . & . & . \\ . & & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_\backslash\,(\mathbb{R})$

1. Calculer $J\,(1)^2$ en fonction de $J\,(1)$.
2. Exprimer $J\,(\lambda)$ en fonction de $J\,(1)$ .En déduire $J\,(\lambda)^2$ en fonction de $J\,(\lambda)$.
3. En deduire une condition sur λ pour que $J\,(\lambda)$ soit inversible , exprimer dans ce cas $J\,(\lambda)^{-1}$ en fonction de $J\,(\lambda)$.

Exercice 8:

Soit l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$$P(X) \longmapsto P(X+1)$$

1. Calculer $M_{\mathcal{B}}\,(\Phi)$ où $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dire comment inverser : $\begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & ... & & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & ... & & C_n^1 \\ 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & C_n^n \end{bmatrix}$

Exercice 9:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_\backslash(\mathbb{R})$, on dit que A est magique si $\sum_{i \leq k \leq n} a_{i,k} = i \sum_{i \leq k \leq n} a_{k,i} = Tr(A), \forall i \in [|1, n|]$.

1. Donner une matrice magique pour *n=2*.

   Dans tout la suite *n=3*.
2. Montrer que tout matrice magique s'écrit d'une seule façon comme somme d'une matrice magique symétrique avec une matrice magique antisymétrique.
3. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques .
4. Construire toutes les matrices magiques symétriques de trace nulle .
5. En déduire toutes les matrices magiques symétriques.

   On se propose de montrer que : A magique et p impair $\Longrightarrow A^p$ magique ,
6. Montrer d'abord que $AJ = JA = Tr(A)J$ où J est la matrice carréd'ordre 3 formée par des 1 partout.

   On admet que $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / A^3 - Tr(A)A^2 + aA + bI_3 = 0$.
7. On suppose dans cette question Tr(A)=0 , montrer que $b \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible , en déduire une contradiction puis conclure.
8. Etudier le cas $Tr(A) \neq 0$.

DS : 99-2000 .

Exercice 10:

1. Dans tout le problème $n \geq 2$.Etudier sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n les variations de $f_n : x \to x^{n+1} + x^n$.
2. En deduire que $f_n(-\frac{n}{n+1}) \leq 2$.
3. En deduire , suivant la parite de n , le nombre de solutions de l'equation : $f_n(x) = 2$.
4. Soit A la matrice carré d'ordre 2 formée par des 1 partout,trouver P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Soit (E_n) l'équation matricielle $X^{n+1} + X^n = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_\in(\mathbb{R})$, montrer que la résolution de cette équation peur se ramener à celle de (E'_n) : $Y^{n+1} + Y^n = B$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_\in(\mathbb{R})$.
6. Montrer que $BY = YB$.
7. Si $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,montrer que : *b=c=0.*
8. Quelles sont les valeurs possibles de a .
9. Discuter suivant les valeurs de n le nombre de solutions de (E_n) .

DS : 99-2000

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc