Série 16 : *Déterminants-Systémes linéaires*

Mercredi le 14 Avril 2004

Exercice 1:

Calculer les déterminants d'ordre 3 suivants :

$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$ $\left|\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\right|$ Matrice de Cauchy $\left|\left(\frac{1}{a_i^{j-1}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\right|$ Matrice de Van Der Monde

où a_i, b_j sont des réels deux à deux distincts

Exercice 2:

Soit a_1, a_2, a_3 des réels deux à deux distincts $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & X & X^2 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$
2. Préciser le coefficient dominant $P(X)$.
3. Quelles sont les racines de $P(X)$.
4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.
5. Calculer le déterminant de *Van Der Monde* $\left|\left(\frac{1}{a_i^{j-1}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\right|$.

Exercice 3:

Soit a_0, a_1, a_2 des réels deux à deux distincts $\mathcal{B} = (1, X, X^2); \mathcal{B}' = (L_0, L_1, L_2)$ la base d'interpolation de Lagrange aux points a_0, a_1, a_2 .

1. Rappeler l'expression de L_0, L_1, L_2 .
2. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]; P(X) = P(a_0)L_0(X) + P(a_1)L_1(X) + P(a_2)L_2(X)$.
3. En déduire l'expression de $P = P_{\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}}$.
4. Conclure de deux façons différentes que P est inversible .
5. Soient $a_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, n scalaires deux à deux distincts et M la matrice $\left(a_i^{j-1}\right)$ (matrice de *Van Der Monde*) .Montrer que M est inversible en interprétant le système $MX = 0$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Exercice 4:

Etudier l'existence de solutions des systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right.$

   <u>*Indication*</u> *: Discuter suivant les valeurs du paramétre* m *.*

2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1) \end{cases}$

Indication : Discuter suivant les valeurs des paramétres a, b, c, d .

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{1+a} + \dfrac{y}{1+2a} + \dfrac{z}{1+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{2+a} + \dfrac{y}{2+2a} + \dfrac{z}{2+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{3+a} + \dfrac{y}{3+2a} + \dfrac{z}{3+3a} = 1 \end{cases}$

Indication : Utiliser la fraction rationnelle : $F = \dfrac{x}{X+a} + \dfrac{y}{X+2a} + \dfrac{z}{X+3a}$.

Exercice 5:

Soit $(S) \quad AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.

Exercice 6:

Soient $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires linéairement indépendantes sur un $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie .

1. Montrer que φ est combinaison linéaire de $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \Leftrightarrow \mathbb{K}er\varphi \supset \mathbb{K}er\varphi_1 \cap \cdots \cap \mathbb{K}er\varphi_n$.

   Indication : Étudier le système $\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x) = 0 \\ \varphi(x) = 1 \end{cases}$

2. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre ?
3. *Base antiduale* : Si $\dim_{\mathbb{R}}(E) = n$ montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E telle que $\varphi_i = e_i^*$
4. *Orthogonal d'un sev* : Si $\dim_{\mathbb{R}}(E) = n$ et F un sev de E^* dimension p. On note $F^\perp = \{x \in E \text{ tel que } \forall \varphi \in F \text{ on a } \varphi(x) = 0\}$. Détérminer $\dim F^\perp$.
5. *Formule d'intégration numérique* : Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait : $\int_2^4 P(t)dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc