MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°17

Mardi le:28-Janvier-2003

Polynomes

1. Soit $n \in IN^*$ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$ et par $(X-1)^2$.

2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X\cos(\theta) + \sin(\theta))^n$ par X^2+1, $(\theta \in IR)$.

3. Pour quelles valeurs de $n \in IN^*$, $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par X^2+X+1?

4. Chercher les polynômes $P \in C[X]$ tels que $4P = (X-1)P' + P''$.(Calculer le degré d'un tel polynôme P , puis les valeurs prises en 0 par ses dérivées successives,puis utiliser la formule de *Taylor*)

5. Résoudre dans C : $z^5 + 6z^3 - 2z^2 + 5z - 10 = 0$, sachant qu'il y a deux racines dont le produit est égal à 5.

6. Résoudre dans IR : $6x^6 - 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$ (1 et -1 sont racines et poser $y = x + \frac{1}{x}$).

7. Soit $n \in IN^*$ et $a \in IR$ donnes.

a. résoudre dans C l'équation : $(z+1)^n = e^{2ina}$

b. En déduire $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n})$

8. Soit $n \in IN^*$

a. déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de dans $C[X]$ de $\sum_{k=0}^{n} X^k$

b. En déduire $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

9. Déterminer les racines dans C ainsi que leurs multiplicités dans le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$

10. Soit $n \in IN^*$, calculer le quotient de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$

11. Déterminer tous les polynômes solutions des équations différentielles suivantes :

a. $(1-X)P' - P = X^n$

b. $XP'' - (X+m)P' + nP = 0$

c. $(1+X)2P'' - (2X+1)P' + 2P = 0$

12. Soit $n \in IN^*$, déterminer la multiplicité de la racine 1 dans le polynôme suivants

a. $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$

b. $X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$

13. Décomposer en facteurs irréductibles dans$IR[X]$ les polynômes suivants

a. $X^6 + 1$

b. $X^8 + X^4 + 1$

14. Critère d'Eisenstein d'irréductibilité dans Q[X].

Soit $n \in IN^*$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ a coefficients dans Z.

a. Montrer que s'il existe p nombre premier tel que :p divise a_k pour $0 \leq k \leq n-1$, p ne divise pas a_n et p^2 ne divise pas a_0 alors le polynôme P est irréductible dans Q[X].

- **b**. Montrer que les polynômes suivant sont irréductibles sur Q :
  - **i**. $X^p + p$ où p est premier
  - **ii**. $-3X^{14} + 2X^8 + 8X^3 - 26X^2 + 6$.

15. **Polynomes Particuliérs**: *Dans tout l'énonce n désigne un entier naturel fixe*.

- **a**. *Polynômes d'interpolation de Lagrange* :
  Soit $f : [0,1] \to IR$ continue et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts , on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{X-r_i}{r_k-r_i}$
  - **i**. calculer $L_k(r_j)$ pour $1 \leq j,k \leq n$
  - **ii**. en déduire que la famille $(L_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $IR_{n-1}[X]$.
  - **iii**. exprimer tout $P \in IR_{n-1}[X]$ dans cette base
  - **iv**. en déduire que $\exists! P \in IR_{n-1}[X]$ qui interpole f aux point $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ cad $f(r_k) = P(r_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$
- **b**. *Polynômes d'interpolation de Hermite*:
  Soit $f : [0,1] \to IR$ continue et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts ,et $\varphi : IR_{2n-1}[X] \to IR^{2n}$ définie par : $\varphi(P) = (P(r_1), P'(r_1), .., P(r_n), P'(r_n))$
  - **i**. Montrer que φ est un isomorphisme
  - **ii**. En déduire qu'il existe un unique polynôme qui interpole f et dont la dérivée interpole f' aussi aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$
- **c**. *Polynômes de Legendre*:$P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$
  - **i**. Précisez les racines de $(X^2-1)^n$ ainsi que leurs multiplicités.
  - **ii**. montrer par récurrence sur $0 \leq k \leq n$ que $((X^2-1)^n)^{(k)}$ admet au moins$k$ racines distinctes dans $]-1,1[$
  - **iii**. en déduire que $((X^2-1)^n)^{(k)}$ admet exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.
- **d**. *Polynômes de tchebechev*: $T_n(X) = cos(n \arccos(X))$.
  - **i**. Montrer que T_n est un polynôme de degré n , préciser son coefficient dominant
  - **ii**. Montrer que $T_n(cos(t)) = cos(nt)$ pout tout réel t
  - **iii**. en déduire les racines de T_n
  - **iv**. trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}