Série 17 : *Intégration sur un segment*

Mercredi 28 Avril 2004

Dans tous les énoncés $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$

Exercice 1:

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

Exercice 2:

Soit $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)\cos(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice 3:

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $f(a+b-t) = f(t), \quad \forall t \in [a,b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
2. Application : Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t}{1+\sin t}dt$.

Exercice 4:

Pour $(p,q) \in \mathbb{R}^{*+2}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t^p)^{\frac{1}{q}}dt$. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$.

Exercice 5:

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Etudier sur $[0, b-a]$ les variations de la fonction $G_a(x) = \displaystyle\int_x^{x+a} |t|dt$.
2. En déduire $\inf_{[0,b-a]} G_a$.
3. En utilisant le changement de variable $u = t + x$, montrer que
$$|\int_a^b f(t)dt| \leq M_1(f)F_{b-a}(x+a) \quad \text{avec : } M_1(f) = \sup_{[a,b]} |f'|.$$
4. En déduire que $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leq M_1(f)\frac{(b-a)^2}{4}$.
5. Quand a-t-on l'égalité ?

Exercice 6:

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\exists n \in \mathbb{N}$ vérifiant
$$\int_0^1 t^k f(t)dt = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

1. Montrer que $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0, \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $r_1, \ldots, r_p$ les racines, distinctes de f dans $[a,b]$ dans lesquels f change de signe.
   (a) Montrer que $(t-r_1)f(t)$ garde un signe constant dans $[a,b]$.
   (b) En déduire que $\prod_{k=1}^{p}(t-r_k)f(t)$ garde un signe constant dans $[a,b]$.
3. Conclure que f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[a,b]$ en changeant de signe.

Exercice 7:

Calculer les limites eventuelles des suites suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
2. $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - 1$, on pourra utiliser l'égalité : $x \leq e^x - 1 \leq x + \frac{ex^2}{2}, \forall x \in [0,1]$.
3. $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$, on pourra s'inspirer de l'exemple précedent.

Exercice 8:

Irrationalité de π et de e : Soit $(p,q,n) \in \mathbb{N}^{*3}$, on pose $P_n(X) = \frac{X^n(qX-p)^n}{n!}$.

1. Préciser les racines de P_n ainsi que leurs multiplicités .
2. Montrer que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad \forall 0 \leq k \leq 2n$.
3. En déduire que $P_n^{(k)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}, \quad \forall 0 \leq k \leq 2n$. *Penser à un changement de variable.*
4. On suppose $\pi \in \mathbb{Q}$ et on pose $\pi = \frac{p}{q}$.
   (a) En déduire de ce qui précéde que $\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^\pi P_n(t)\sin t dt = 0$.
   (c) Conclure que la suite $\left(\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 0.
   (d) Déduire une contradiction, puis conclure.
5. En raisonnant cette fois sur $\int_0^\pi P_n(t)e^t dt$, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9:

$\forall x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que $\forall x > 0, \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Montrer que $\forall x > 0, \quad F(x) = \arctan(x)\ln x - \int_1^x \frac{\arctan t}{t}dt$
3. Montrer que $\lim_{0^+} F$ existe, et est finie.
   On la note dans la suite par $\int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$, on ne cherchera pas à la calculer mais plutôt à en donner une valeur approchée. On pose alors $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$.

4. Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
5. En déduire pour $n \in \mathbb{N}, x \in]0,1]$ une majoration de $|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x)|$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Montrer que $\left| \displaystyle\int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2} dt - u_n \right| \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.
7. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ à 10^{-2} prés .

DS : 2000-2001

Exercice 10:

Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $f_0(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = 2 \displaystyle\int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les fonctions f_n sont bien définies.
2. Calculer f_1, f_2, f_3.
3. Montrer l'existence de deux suites réelles $(a_n), (b_n)$ vérifiant
   $f_n(x) = a_n x^{b_n}$, $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
   On donnera b_n en fonction de n et a_{n+1} en fonction de a_n.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \ln a_n = - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln(1 - 2^{-k})$.
5. Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq -x - \ln(1-x) \leq \dfrac{x^2}{2(1-x)}$.
6. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |-2^k \ln(1-2^{-k}) - 1| \leq 2^{-k}$, puis que $\ln a_n \sim \frac{n}{2^n}$.
7. Conclure que pour $x \in [0,1]$ fixe, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite.

DS : 2001-2002.

Exercice 11:

Pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n) dt$, on se propose dans la suite d'étudier le comportement asymptotique de cette suite.

1. Donner u_n ainsi que sa limite si $f(x) = x, \quad f(x) = x^\alpha, \quad f(x) = x(1-x)$.
2. Dans la suite on considère $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $1 - u_n = \frac{1}{n} \left(\ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n) dt \right)$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$
   (e) En déduire un encadrement de u_{10} à 10^{-2} prés.

DS : 2001-2002.

FIN