Série 18 : *Equations différentielles*

Mercredi 05 Mai 2004

Exercice 1:

DS 1 2001-2002 : Résoudre le problème de Cauchy suivant :
$y"(x) - 2y'(x) + 3y(x) = ch^2(x), y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 2:

DS 2000-2001 :Résoudre l'équation différentielle suivante :
$2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$.

Exercice 3:

Equation de *Lagrange* : Elle est de la forme : $y = xa(y') + b(y')$; pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $y = \lambda x$. Résoudre :

1. $y = xy'^2 + y'^2$.
2. $y = x(1 + y') + y'^2$.

Exercice 4:

Equation de *Clairaut* :Elle est de la forme :$y = xy' + b(y')$; pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $y = \lambda x$. Résoudre :

1. $y = xy' + y'^2$.
2. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

Exercice 5:

Equation de *Bernouilli* : Elle est de la forme :$y = ya(x) + y^\alpha b(x)$, pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable :$z = y^{1-\alpha}$. on se raméne alors à une équation linéaire du 1^{er} ordre. Résoudre :

1. $x^2y' + y + y^2 = 0$.
2. $y' + xy = x^3y^3$.

Exercice 6:

Equation de *Ricatti* :Elle est de la forme : $y = y^2a(x) + yb(x) + c(x)$; pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable : $y = y_0 + z$ oùy_0 solution particuliére à trouver, on se raméne alors à une équation de *Bernouilli* ; Résoudre :

1. $\left(1 + x^3\right) y' = y^2 + x^2y + 2x$.
2. $y' + y^2 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

Exercice 7:

Equations homogénes : Elle est de la forme : $\varphi\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$, on pose $u(t) = \frac{y}{x}, v(t) = y'$ où u, v sont les paramétrages de la courbe d'equation $\varphi(u, v) = 0$, ainsi on raméne l'equation à une autre à variables séparables.
Résoudre : $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Exercice 8:

Equations incomplétes : Elle est de la forme : $\varphi(y, y') = 0$ ou bien $\varphi(x, y') = 0$,on pose $u(t) = y, v(t) = y'$ dans le 1er cas et $u(t) = x, v(t) = y'$ où u, v sont les paramétrages de la courbe d'equation $\varphi(u, v) = 0$, ainsi on raméne l'equation à une autre à variables séparables; Résoudre :

1. $y^2 + y'^2 = 1$.
2. $y'^2 - x^2\left(1 + y'^2\right) = 0$.

Exercice 9:

Equations fonctionnelles : Trouver les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $2\displaystyle\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}\left(f(x) + 2f(0)\right)$.

Exercice 10:

Applications géometriques :

1. Soit D une droite passant par l'origine déterminer puis tracer les courbes telles que O soit à égale distance entre les points de la courbe et l'intersection de D avec la normale à la courbe au méme point,faire un dessin.
2. Déterminer la forme d'un miroir de sorte que tous les rayons issus d'un point O soient réflichis vers un même point A.

Exercice 11:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y" - 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = e^x sin(x), \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(1 - x^2)y' + xy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. $xy' + 2y = \frac{2x}{1+x^2}$.
4. $(1 - x^2)y' - xy = 1$.
5. $\left(x^2 - 4\right)y' + (1 - x)y = 1$.
6. $y'\sin(x) - y\cos(x) = e^x\sin^4(x)$

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc