Série 19 : Calcul de primitives — Equations différentielles

Samedi 08 Mai 2004

I. Calcul de primitives

Les formules suivantes sont valables sur le domaine de définition de la fonction à integrer.

$\int^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ avec $\alpha \neq -1$	$\int^x \frac{1}{t} dt = \ln\|x\| + C$	$\int^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x + C$
$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin x + C$	$\int^x \cos t dt = \sin x + C$	$\int^x \sin t dt = -\cos x + C$
$\int^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln\|\frac{1+x}{1-x}\| + C$	$\int^x \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan x + C$	$\int^x \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\mathrm{co}\tan x + C$
$\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2+\alpha}} dt = \ln\|x + \sqrt{x^2+\alpha}\| + C$	$\int^x \mathrm{ch} t dt = \mathrm{sh} x + C$	$\int^x \mathrm{sh} t dt = \mathrm{ch} x + C$
$\int^x \frac{1}{\cos t} dt = \ln\|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\| + C$	$\int^x \frac{1}{\sin t} dt = \ln\|\tan \frac{x}{2}\| + C$	$\int^x e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C; \alpha \neq 0$
$\int^x \frac{1}{\mathrm{sh}^2 t} dt = -\mathrm{coth} x + C$	$\int^x \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} dt = \mathrm{th} x + C$	$\int^x \frac{1}{\mathrm{ch} t} dt = 2\mathrm{arc}\tan(e^x) + C$
$\int^x \mathrm{coth} t dt = \ln\|\mathrm{sh} x\| + C$	$\int^x \frac{1}{\mathrm{sh} t} dt = \ln\|\mathrm{th} \frac{x}{2}\| + C$	$\int^x \mathrm{th} t dt = \ln(\mathrm{ch} x) + C$

Calculer les intégrales suivantes : $\int^x \frac{1-t}{(1+t+t^2)^2} dt; \int^x \sin^3 t \cos^2 t dt; \int^x \frac{\cos 2t}{\sin t + \sin 3t} dt;$
$\int^x \frac{\mathrm{ch} 3t}{1+\mathrm{sh} t} dt; \int^x \frac{1}{1+\sqrt{\frac{t+1}{t}}} dt; \int^x \frac{1}{t\sqrt{-t^4+3t^2-2}} dt.$

II. Equations différentielles

II.1. *Equations différentielles du 1ér ordre :* $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$. Alors $y(x) = y_H(x) + y_0(x)$

$y_H(x) = \mathrm{Cte}\ z(x)$ avec $z(x) = e^{-\int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt}$	$y_0(x) = \lambda(x) z(x)$ avec $\lambda'(x) = \frac{c(t)}{a(t)z(t)}$

II.1. *Equations différentielles du 2éme ordre :* $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{\lambda x} P(x)$
avec $(a, b, c, \lambda) \in \mathbb{C}^4; P \in \mathbb{C}[X]$. Alors $y(x) = y_H(x) + y_0(x); aX^2 + bX + c = 0(*); \Delta = b^2 - 4ac.$

Cas possibles	$y_H(x)$	$y_0(x) = e^{\lambda x} Q(x); Q(x) polynme$
$\Delta > 0$ r_1, r_2 solutions de (*)	$y_H(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$	$\deg Q = \deg P + 1$si λsolution de (*) $\deg Q = \deg P$si non
$\Delta = 0$ r solution de (*)	$y_H(x) = (Ax + B)e^{rx}$	$\deg Q = \deg P + 2$si λsolution de (*) $\deg Q = \deg P$si non
$\Delta < 0$ $\alpha + i\beta$ solution de (*)	$y_H(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$	$\deg Q = \deg P + 1$si λsolution de (*) $\deg Q = \deg P$si non

II.3 *Résoudre :* $y'(x)\sin x - y(x)\cos x = e^x \sin^4 x; y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(x^2+1);$
$y'' + 4y' + 4y = e^{2x}(x^2+1); y'' + y = xe^x, y'' + y = x\cos x, y'' + y' - 2y = x^2 + 1.$

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc