**MPSI 1** **2002-2003**

**CPGE Agadir**

# Feuille d'exercices N°20

**Mardi le**:**25-Février-2003**

*Fonctions intégrables*

1. Etudier l'integrabilite sur $]0,+\infty[$ de : $x \to \frac{\sin(x)}{x^a}$ , $a \in IR$ fixé on admet que pour $a = 1$ la fonction n'est pas integrable
2. Meme question pour la fonction $x \to \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x^a}\right)$
3. Meme question sur $]0,1[$pour la fonction $x \to \frac{1}{x-\sqrt{x}}$
4. Meme question sur $]0,1[, ]1,+\infty[$pour la fonction $x \to x^\alpha \ln(x)^\beta$,( Intégrales de *Bertrand* ) $\alpha > 0, \beta > 0$
5. Meme question sur $[0,+\infty[$pour la fonction $x \to x^\alpha e^{-x^\beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$
   a. montrer que : $\forall n \in IN^*, \forall x \in \left[0, \sqrt{n}\ \right] : (1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x} \leq (1 + \frac{x}{n})^{-n}$
   b. en deduire la valeur de : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ( *Integrale de Poisson* ) on pourra utiliser la formule de *Stirling* : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(\frac{e}{n})^n$

**Probléme 1** :*Controle* 99-2000

Soit $n$ entier nature non nul etudier l'integrabilite sur $]0,1]$ de la fonction $f : x \to x^n ln(x)$ puis calculer $\int_{]0,1]} f$ ,$\int_{]0,\frac{1}{2}]} f$

1. etudier l'integrabilite sur $]0,1[$ de la fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1-x}$
2. montrer que :$\forall n \in IN^*$, $\left|\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{1-x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right| \leq \frac{1}{n+1}$
3. En déduire la valeur de $\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{1-x}$ (Indication :$\lim\limits_{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $(1 - x^x) = (1 - x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ )
4. avec un raisonnement pareil que le precedent montrer que: $\int_{]0,\frac{1}{2}[} \frac{\ln(x)}{1-x} = -(\ln 2)^2 - \lim\limits_{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^k}$
5. etudier l'integrabilite sur $[0,1[$ des fonctions : $g : x \to \frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x^2-1}$, $h : x \to \frac{\ln(x+1)-x\ln 2}{x^2-1}$
   on pose : $I = \int_{[0,1[} \frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x^2-1}$, $J = \int_{[0,1[} \frac{\ln(x+1)-x\ln 2}{x^2-1}$
6. montrer que : $I = \frac{1}{2}\int_{[\frac{1}{2},1[} \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{1}{4}(\ln 2)^2$
7. en deduire les valeurs de $I, J$.

**Probléme 2** : *DS* 2000-2001

Dans tout le problème on pose $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{2}$, $P_2(X) = (X - a)(X - b)$

1. Montrer que : $\forall P \in IR_1[X]$ la fonction $t \to P(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
2. Trouver 2 réels $\alpha$ , $\beta$ tels que : $\int_{[0,+\infty[} P(t)e^{-t} = \alpha P(a) + \beta P(b), \forall P \in IR_4[X](*)$
3. Vérifier que $(*)$ est aussi vraie pour $P \in IR_2[X]$
4. Soit $P \in IR_3[X]$ montrer que $\exists (Q,R) \in IR_1[X]^2 / P = P_2 Q + R$
   Vérifier que $\int_{[0,+\infty[} P_2(t)Q(t)e^{-t} = 0$ , ( $Q$ polynôme de la question précédente),en déduire que $P$ vérifie $(*)$ si $P \in IR_3[X]$
5. Soit f : $[0,+\infty[\to IR$ de classe $C^4$telle que $f^{(4)}$est bornée montrer que :
   $\exists T \in IR_4[X] / 0 \leq |f^{(4)}(t)| \leq |T(t)|, \forall \in [0,+\infty[$ (indic : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral)
6. En déduire que la fonction $t \to f(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
7. montrer que $\exists! S \in IR_3[X] / S(a) = f(a), S'(a) = f'(a), S'(a) = f'(a), S''(b) = f''(b)$.
8. soit $x \in ]a,b[$ quelconque mais fixe dans cette question , on pose $g(t) = f(t) - S(t) - AP_2(t)^2$ où $A = \frac{f(x)-S(x)}{P_2(x)^2}$ , montrer que g$^{(4)}$admet au moins une racine dans $]a,b[$ (indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle).en déduire que alors que $|f(x) - S(x)| \leq \frac{M_4(f)}{4!} P_2(x)^2$ où $M_4(f) = sup_{[0,+\infty[}|f^{(4)}|$
9. en déduire que : $\left|\int_{[0,+\infty[} f(x)e^{-x}dx - \alpha f(a) - \beta f(b)\right| \leq \frac{M_4(f)}{6}$
10. donner une valeur approchée de $\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{2+x}dx$