Série 20 : *Fonctions à deux variables*

Mercredi 12 Mai 2004

Exercice 1:

Déterminer les extremums des fonctions suivantes :
$f:(x,y)\to 2x+y-x^4-y^4; g:(x,y)\to xe^y+ye^x; h:(x,y)\to \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.
$f:M\to MA^2+MB^2+MC^2; g:M\to MA+MB+MC; h:M\to (MA)(MB)(MC)$.
où $(A,B,C)\in\mathbb{R}^2$ fixés ; $M\in\mathbb{R}^2$ variable.

Exercice 2:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)f+x^2+y^2=0; x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \quad x=r\cos\theta, y=r\sin\theta.$
2. $2xy\frac{\partial f}{\partial x}+\left(1+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial y}=0. \quad x=\frac{u^2+v^2}{2}, y=\frac{u}{v}.$
3. $2\left(y^2-x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(y^2-x\right)=0. \quad x=u^2+v^2, y=u+v.$

Exercice 3:

Calculer les intégrales suivants :

1. $\int\int_D(x^2+y^2)dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 1-\frac{y^2}{4}\right\}$;
2. $\int\int_D x^2ydxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x^2+y^2\leq 1\right\}$.
3. $\int\int\int_D z^2ydxdydz$où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/0\leq x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

Exercice 4:

1. Montrer que l'équation $\ln(x)+2x+1=0$ admet une seule solution $a\in]0,\frac{1}{e}[$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^*\text{x}\mathbb{R}$ on pose $f(x,y)=x(\ln(x)+x+y^2)$ déterminer le point critique.
3. Vérifier que f admet un minimum relatif en ce point et que $\min f=-a(a+1)$.

Exercice 5:

Soit $\lambda>1$, on pose $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \quad x>0\}$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \quad x>0, y\neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x,y)=x^\lambda y-y^2-y\ln(x+1)+1$.

1. Pour $x>0$ on pose $f(x)=x^\lambda-\ln(x+1)$, montrer que l'équation$f'(x)=0$ admet une seule solution $b\in]0,+\infty[$.
2. On pose $f(b)=2c$, montrer que $c<0$.
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution $a\in]0,+\infty[$ et que $a>b$.
4. Déterminer les points critiques de f (on les exprimera en fonction de a,b,c).
5. Montrer que f admet un seul extremum , que l'on précisera.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc