Série 2 : *Dénombrement*

Jeudi 24 Septembre 2003

1.Entiers naturels :

Exercice 1:

Raisonnement par récurrence : Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
3. 9 divise $2^{2n} + 15n - 1$.
4. $\forall k \in [|0, n|]$ on a : $C_{2n}^{k} \leqslant C_{2n}^{n}$.
5. $\forall p \in [|0, n|]$ on a :$\sum_{k=p}^{n} C_{k}^{p} = C_{n+1}^{p+1}$ *Récurrence descendante* .
6. $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{(mn)!}{m!n!} \in \mathbb{N}^*$ *Récurrence double* .
7. Un *n-mot de Gauss* est un *2n-uplet* $(x_1, x_2, ..., x_{2n}$ formé par des éléments de $[|1, n|]$ où chaque élément de $[|1, n|]$ apparaît exactement 2 fois.
   (a) Trouver le nombre des *n-mot de Gauss* pour *n=1,n=2,n=3* .
   (b) Montrer que dans le cas général il y en a $\frac{(2n)!}{2^n}$.

Exercice 2:

Manipulation des sommes : Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

1. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
2. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)^2$.
3. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} max(i, j)$.
4. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} max(i, j)$.

2.Dénombrement :

Exercice 3:

Lemme des tiroirs : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal *n+1* , $E_1, E_2, ..., E_n$ n parties de E deux a deux *disjointes* ,c-à-d qui ne s'intersecte jamais deux a deux ,et enfin dont la ruénion est E.On dit que les parties $E_1, E_2, ..., E_n$ forment une partition de E .

1. Montrer que $\exists i \in [|1, n|] \, telqueCard(E_i) \geq 2$

   Si on dispose de n tiroirs et n+1 objets alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets

Exercice 4:

Paradoxe des anniversaire :

1. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n \leq p$ .Quelle est la proportion des applications injectives de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$?
2. En déduire la probabilté pour que deux personnes parmi n aient le même anniversaire.
3. Faire le calcul pour *n=45* .

Exercice 5:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, de combien de façon on peut faire asseoir n hommes et n femmes numérotes autour d'une table ronde en repectant l'alternance homme-femme si :

1. Les siéges sont numérotés mais ni les hommes ni les femmes ne le sont .
2. Les siéges et les hommes sont numérotés mais les femmes ne le sont pas.
3. Les femmes sont numérotés mais les hommes et les siéges ne le sont pas.
4. Les siéges ,les hommes et les femmes ne sont pas numérotés .

Exercice 6:

1. Dans un ensemble E a n éléments combien peut-on former de parties qui contiennent une partie fixe A ,elle formée par p éléments ?
2. Sur un ensemble E à n éléments combien peut-on définir de relations binaires ?

   Penser a la définition des relations binaires à l'aide des graphes .
3. Parmi ces relations binaires combien sont-elles reflexives ?

   Penser a la définition des relations binaires reflexives à l'aide des graphes et à utiliser la question (1) .
4. Combien peut-on trouver de couples *(A,B)* de parties de E telles que $A \subset B \subset E$?

Exercice 7:

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* x \mathbb{N}^*$. Combien peut-on définir d'applications strictement croissantes de $[|1,n|]$ vers $[|1,n+p|]$?

Penser a caractériser de telles applications à l'aide de leurs images

---

3.Manipulation des C_n^p :

Exercice 8:

Formule du binôme de Newton :

1. Quel est le coefficient de $x^6y^4z^5$ dans le dé veloppement de $(x+2y-3z)^{15}$?
2. En calculant de deux façons $((1+x)^n)^3$, démontrer que : $C_{3n}^n = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-p} C_n^p C_n^k C_n^{n-p-k}$.

3. Montrer que : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2 \sum_{k=0}^{p} kC_n^{p-k}C_n^k = C_{2n-1}^{p-1}$ puis en déduire que : $\sum_{k=0}^{p} k\left(C_n^k\right)^2$.
   Penser à utiliser $(1+x)^n$ *et sa derivee* .
4. En développant ou bien en dérivant $(1+x)^n$ calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k$.

Exercice 9:

1. soit E ensemble non vide et A partie de E fixe.On définit l'application suivante : $$\begin{array}{l} f : P(E) \to P(A)xP\left(\bar{A}\right) \\ X \to \left(X\cap A, X\cap \bar{A}\right)\end{array}$$
   Montrer que f est bijective .
2. En déduire que : $\forall (n,m,p)\in\mathbb{N}^3 \sum_{k=0}^{n} C_n^p C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$ en fonction de n.

Exercice 10:

Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ .Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$.

Exercice 11:

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $Q_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n-k}^k$.

1. Calculer les 6 premiers Q_n .
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $Q_{n+2} = Q_{n+1} - Q_n$.*Penser a un réccurence forte !* .
3. En déduire que Q_n est *6-périodique* .
4. Calculer $Q_{1000000}$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc