www.chez.com/myismail©
MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°21

Mercredi le:26-Fevrier-2003

Equations différentielles

1. *DS* 1 2001-2002:Résoudre le problème de Cauchy suivant : $y''(x) - 2y'(x) + 3y(x) = ch^2(x), y(0) = y'(0) = 0$
2. *DS* 2000-2001:Résoudre l'équation différentielle suivante : $2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$,precisez les solutions maximales
3. Equation de *Lagrange* :Elle est de la forme :$y = xa(y') + b(y')$;pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable:$y = \lambda x$.Résoudre:
   - **a**. $y = xy'^2 + y'^2$
   - **b**. $y = x(1+y') + y'^2$
4. Equation de *Clairaut* :Elle est de la forme :$y = xy' + b(y')$;pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable:$y = \lambda x$.Résoudre:
   - **a**. $y = xy' + y'^2$
   - **b**. $y = xy' + \frac{1}{y'}$
5. Equation de *Bernouilli* :Elle est de la forme :$y = y \quad a(x) + y^{\alpha} b(x)$pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable:$z = y^{1-\alpha}$.on se raméne alors a une équation linéaire du 1^{er}ordre;Résoudre:
   - **a**. $x^2 y' + y + y^2 = 0$
   - **b**. $y' + xy = x^3 y^3$
6. Equation de *Ricatti* :Elle est de la forme :$y = y^2 a(x) + yb(x) + c(x)$;pour résoudre cette équation on utilise le changement de variable:$y = y_0 + z. y_0$ solution particuliére a trouverr , on se raméne alors a une équation de *Bernouilli*;Résoudre:
   - **a**. $(1+x^3)y' = y^2 + x^2 y + 2x$
   - **b**. $y' + y^2 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
7. *Equations homogénes*:Elle est de la forme : $\varphi(\frac{y}{x}, y') = 0$, on pose $u(t) = \frac{y}{x}, v(t) = y'$ où u, v sont les paramétrages de la courbe d'equation $\varphi(u,v) = 0$, ainsi on raméne l'equation a une autre a variables separables;Résoudre:
   - **a**. $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$
8. *Equations incomplétes* : Elle est de la forme : $\varphi(y, y') = 0$ ou bien $\varphi(x, y') = 0$,on pose $u(t) = y, v(t) = y'$ dans le 1er cas et $u(t) = x, v(t) = y'$ où u, v sont les paramétrages de la courbe d'equation $\varphi(u,v) = 0$, ainsi on raméne l'equation a une autre a variables separables;Résoudre:
   - **a**. $y^2 + y'^2 = 1$
   - **b**. $y'^2 - x^2(1 + y'^2) = 0$
9. *Equations fonctionnelles*:Trouver les fonctions continues sur IR verifiant :
   - **a**. $2\int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt = 0, \forall x \in IR.$
   - **b**. $\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}(f(x) + 2f(0))$
10. *Applications géometriques* :
    - **a**. Soit D une droite passant par l'origine detetminer puis tracer les courbes telles que O soit a égale distance entre les points de la courbe et l'intersection de D avec la normale a la courbe au méme point,faire un dessin
    - **b**. Déterminer la forme d'un miroir de sorte que tous les rayons issus d'un point O soient reflichi vers un meme point A
11. Résoudre l'équation différentielle suivante: $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = e^x sin(x), \alpha \in IR$
12. Résoudre les équations différentielles suivantes:
    - **a**. $(1-x^2)y' + xy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.
    - **b**. $xy' + 2y = \frac{2x}{1+x^2}$.
    - **c**. $(1-x^2)y' - xy = 1$.
    - **d**. $(x^2-4)y' + (1-x)y = 1$
    - **e**. $y'\sin(x) - y\cos(x) = e^x \sin^4(x)$

Puis dans chaque cas chercher les solutions maximales