Série 21 : *Espaces vectoriels euclidiens*

Mercredi 02 Juin 2004

Exercice 1:

Completer $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{i}+\sqrt{3}\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}}{\sqrt{5}}$ en une b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2:

Donner dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la projection orthogonale sur $F = Vect\left(\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\right)$

Exercice 3:

Reconnaitre les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad ; B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4:

Soit u un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1. Montrer que U^tU est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$.
2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

Exercice 5:

E désigne un espace euclidien de dimension n. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application non nécéssairement linéaire.

1. On suppose que f conserve le produit scalaire, c'est à dire : $\forall (x,y) \in E^2 \quad :< f(x), f(y) >=< x, y >$. Démontrer que f est linéaire.
2. On suppose que f conserve les distances, c'est à dire : $\forall (x,y) \in E^2 \quad : ||f(x)-f(y)|| = ||x-y||$. Démontrer que $f = f(0_E) + g$, avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 6:

Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui concervent le produit vectoriel sont exactement ceux automorphismes othogonaux directs.

Exercice 7:

Montrer que $\forall\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\in\mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}\wedge\left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}\right)=\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{b}-\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}$

Formule du produit mixte.

Exercice 8:

Soit E ev euclidien , $n\in\mathbb{N}^*, (u_i)_{1\leq i\leq n}\in E^n$ tels que $\|u_i\|=1, \forall i\in[|1,n|]$ et $\|x\|=\sum_{i=0}^{n}\langle x,u_i\rangle^2 \quad ;\forall x\in E$ montrer que $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une b.o.n de E.

Exercice 9:

Polynômes de Tchebychev : On pose pour n entier et $-1\leq x\leq 1$,$T_n(x)=cos(nArccos(x))$.

1. Montrer que $T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x)$.
2. Pour $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ continues ,on pose $<f,g>=\displaystyle\int_{[-1,1]}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$, montrer que c'est bien defini et qu'ainsi on muni $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
3. Montrer que la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.

Exercice 10:

DS 9 2001-2002 : On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire suivant $<P,Q>=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Pour tout $P\in IR_2[X]$ on pose $\varphi(P)(X)=(X^2-X)P"(X)+(2X-1)P'(X)$ et $s(P)(X)=P(1-X)$

1. Montrer que φ, s sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ils bijectifs ?
2. montrer que $\forall k\in\{0,1,2\},\exists! L_k\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que :
$$\deg(L_k)=k; co(L_k)=1; \varphi(L_k)=k(k+1)L_k$$
3. Montrer que $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_2[X]^2$ on a : $<\varphi(P),Q>=<P,\varphi(Q)>e, <s(P),Q>=<P,s(Q)>$.
4. En déduire que (L_0,L_1,L_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. En utilisant c. Dire pourquoi les matrices de φ, s dans (L_0,L_1,L_2) sont symétriques , expliciter ensuite ces matrices.
6. Montrer que s est une réflexion préciser par rapport à quel plan.

Exercice 11:

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(./.)$ défini par :

$$\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall u'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\qquad (u/u')=xx'+yy'+zz'.$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\|=\sqrt{(u/u)}$.

On note $=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que est orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus.

Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille de cardinal maximal, $=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ formée de n vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un réel θ tels que : pour tout couple d'entiers (i,j) vérifiant $1\leq i<j\leq n$, on ait : $(u_i/u_j)=\theta$. La partie I

permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie II étudie les propriétés d'une telle famille et la partie III propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de n, mais ce résultat ne sera pas démontré dans ce problème).

Partie I : Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel a, on note $M_{n,a}$ la matrice de $_n()$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, les autres étant égaux à a. On note I la matrice unité de $_n()$ et J la matrice de $_n()$ dont tous les coefficients valent 1.

Calculer J^2 et en déduire les 2 valeurs propres de J.

1. Utiliser une base de $_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour déterminer les deux valeurs propres de $M_{n,a}$.
2. En déduire que $M_{n,a}$ est inversible si et seulement si : $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$.

Partie II : On suppose que l'on a trouvé une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formée de n vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, et un réel θ solutions du problème.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$.

1. Montrer que

$$M_{n,\theta} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0.$$

2. En déduire la valeur maximale de n lorsque $\theta \neq 1$ et $\theta \neq -\frac{1}{n-1}$.

Étude du cas $\theta = 1$.

1. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_i et u_j (avec $i \neq j$). À quelle condition a-t-on l'égalité ?
2. En déduire que $n = 1$.

Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4), formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.

1. Donner la valeur de θ.
2. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer les coordonnées de u_4 dans cette base.

Partie III :

Donner une famille solution du problème posé, pour $n = 3$ et $\theta = 0$.

On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est solution du problème posé avec $\theta = -\frac{1}{2}$.
2. Trouver deux réels λ et μ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème pour $n = 4$.

EDHEC 2000

FIN