MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°22

Lundi le:03-Mars-2003

Matrices

1. On considère m un nombre complexe non nul, et on pose : $A = \begin{bmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}$

- **a**. Calculer $(A+I_3)(A-2I_3)$ En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.
- **b**. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I_3), C = -\frac{1}{3}(A-2I_3)$ et . Calculer, pour tout $n \in IN$: B^n, C^n.
- **c**. Calculer A^n pour tout $n \in IN$.
- **d**. Retrouver le résultat du c) en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)(X-2)$

2. Calculer les puissances successives de $\begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{bmatrix}$, où a et b sont deux nombres complexes.

3. Soit A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n, nilpotentes (ie telles qu'une de leurs puissances soit nulle), et qui commutent.

- **a**. Montrer que $A+B, AB$ sont nilpotentes.
- **b**. Montrer que $A-I_n$ est inversible, et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.
- **c**. Inverser la matrice carré d'ordre $n \geq 2$ $\begin{bmatrix} 1 & a & 0.... & 0 \\ 0 & . & a & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & & . & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

  a étant un complexe arbitraire.

4. On considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3), e_2 = (1,1,1), e_3 = (1,3,4), f_1 = (1,2,4), f_2 = (1,-1,1), f_3 = (1,1,5)$ de IR^3.Montrer que$B_1 = (e_1,e_2,e_3), B_2 = (f_1,f_2,f_3)$ sont deux bases de IR^3, calculer les matrices de passage de B_1 àB_2 et de B_2 à B_1, et vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

5. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ montrer que A est la matrice dans la base canonique de IR^3 dont on precisera le noyau et l'image

6. donner la matrice dans la base canonique de IR^3 de la projection sur D parallelement a π où

D: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ $\pi : x+y-z=0$

7. Soit p un projecteur sur un ev de dimension finie montrer que $rg(p)=Tr(p)$ (chercher une base où sa matrice s'exprime d'une facon simple)

8. Soit $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ Soit $\lambda \in IR$ calculer $rg(A-\lambda I_3)$ suivant les valeurs de λ

9. Soit $\lambda \in IR, J(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & . & . & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & & 1 \\ . & 1 & . & . & . \\ . & & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 & \lambda \end{bmatrix} \in M_n(IR)$

a. Calculer $J(1)^2$ en fonction de $J(1)$

b. Calculer $J(\lambda)$ en fonction de $J(1)$

c. Calculer $J(\lambda)^2$ en fonction de $J(\lambda)$

d. En deduire une condition sur λ pour que $J(\lambda)$ soit inversible , exprimer dans ce cas $J(\lambda)^{-1}$ en fonction de $J(\lambda)$

10. Soit $\begin{matrix} u : IR_n[X] \to IR_n[X] \\ P(x) \to P(X+1) \end{matrix}$ $, B=(1,X,..,X^n)$

a. Calculer $M_B(u)$

b. Inverser $\begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & ... & & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & ... & & C_n^1 \\ 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & C_n^n \end{bmatrix}$

11. *DS* 99-2000

Soit $n \in IN*$ et $A=(a_{i,j}) \in M_n(K)$, on dit que A est magique si $\sum_{i\leq k\leq n} a_{i,k} = i\sum_{i\leq k\leq n} a_{k,i} = Tr(A), \forall i \in [|1,n|]$.

a. Donner une matrice magique pour n=2.

Dans tout la suite n=3.

b. Montrer que tout matrice magique s'écrit d'une seule façon comme somme d'une matrice magique symétrique avec une matrice magique antisymétrique.

c. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques .

d. Construire toutes les matrices magiques symétriques de trace nulle .

e. En déduire toutes les matrices magiques symétriques.

On se propose de montrer que : A magique et p impair $\Rightarrow A^p$ magique ,

f. montrer d'abord que $AJ=JA=Tr(A)J$ où J est la matrice carré d'ordre 3 formée par des 1 partout.

On admet que $\exists(a,b) \in IR^2 / A^3 - Tr(A)A^2 + aA + bI_3 = 0$,

g. on suppose dans cette question Tr(A)=0 , montrer que $b \neq 0 \Rightarrow$A inversible , en déduire une contradiction puis conclure.

h. Etudier le cas Tr(A)≠0.

12. Dans tout le problème $n \geq 2$.

a. Etudier sur IR suivant la parité de n les variations de$f_n : x \to x^{n+1} + x^n$

b. En deduire que $f_n(-\frac{n}{n+1}) \leq 2$.

c. En deduire , suivant la parite de n , le nombre de solutions de l'equations$f_n(x) = 2$.

d. Soit A la matrice carré d'ordre 2 formée par des 1 partout, trouver P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ où B est la matrice dont les lignes sont (0 0) et (0 2)

e. Soit (E_n) l'équation matricielle $X^{n+1} + X^n = A$ d'inconnue $X \in M_2(IR)$, montrer que la résolution de cette équation peur se ramener a celle de $(E\prime_n) Y^{n+1} + Y^n = B$ d'inconnue $Y \in M_2(IR)$.

f. Montrer que $BY = YB$.

g. Si les lignes de Y sont respectivement (a b) et (c d) montrer que : b=c=0.

h. Quelles sont les valeurs possibles de a

i. Discuter suivant les valeurs de n le nombre de solutions de (E_n)

13. Dans tout le problème, l'espace vectoriel R^3 est muni de sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3).

On note $\mathsf{L}(\mathsf{R}^3)$ la R-algèbre des endomorphismes de R^3, $\mathsf{M}_3(\mathsf{R})$ la R-algèbre des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de R^3 de matrice $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de R^3.

2. Soient $e_1' = (1,1,1)$, $e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (1,1,-2)$.

a. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de R^3.

b. Déterminer la matrice S' de s dans la base (e_1', e_2', e_3').

c. Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

a. La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathsf{M}_3(\mathsf{R})$?

b. Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathsf{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n == a_n I_3 + b_n S$ (on convient que : $\forall M \in \mathsf{M}_3(\mathsf{R}) \quad M^0 = I_3$).

d. Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathsf{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

e. Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathsf{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n \in \mathsf{N}}$ est géométrique.

f. En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathsf{N}$.

3. Soit $B = S - 2I_3$.

a. Calculer B^n pour $n \in \mathsf{N}$.

b. En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathsf{N}$ (on pourra, après justification, utiliser la formule du bin me de Newton).

c. Comparer avec le résultat de la question 3).

4. L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose : $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u \circ s = s \circ u = f$.

2. Soit $(e_1'' = \frac{e_1'}{\sqrt{3}},, e_2'' = \frac{e_2'}{\sqrt{2}}, e_3'' = \frac{e_3'}{2\sqrt{2}})$.

- **a**. Montrer que (e_1'', e_2'', e_3'') est une base .
- **b**. Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u.
- **a**. Exprimer la matrice de s dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') en fonction de S'.
- **b**. En déduire la matrice de f dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').

3. **a**. Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?

- **b**. Soit $P = \text{Vect}\,(e_2'', e_3'')$.
  - **i**. Montrer que $f(P) = P$.
  - **ii**. Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P, $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaitra.

4. On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.

- **a**. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- **b**. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
  - **i**. Montrer que le vecteur $g(e_1'')$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?
  - **ii**. Soit M la matrice de g dans la base (e_1'', e_2'', e_3''). Montrer que M commute avec $(S')^3$.
  - **iii**. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').
- **c**. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?