Série 22 : *Espaces affines*

Mercredi 09 Juin 2004

Dans tous les énoncés ξ désigne le plan ou l'espace réel.

Exercice 1:

A, B, A', B' quatre points de ξ tel que $A \neq A', B \neq B'$ .Montrer qu'il existe f , une homothétie ou une translation qui transforme A en A' et B en B' $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ proportionnels.

Exercice 2:

On suppose que ξ est de dimension 3.

1. Montrer que deux droite de ξ sont coplanaire si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
2. Soit D_1 et D_2 les droites d'équations :

$$D_1 : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \quad .D_2 : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

Montrer qu'ils sont coplanaires et former une équation cartésienne du plan les contenants.

Exercice 3:

On considère dans $\mathbb{R}^3$ muni de sont repère canonique :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, D : \begin{cases} z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad .D' : \begin{cases} y = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une unique droite D passant par A et rencontrant D et D' , et en donner une équation cartésienne .

Exercice 4:

$$\text{Soit : } D : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad .D' : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}$$

, montrer qu'il existe un unique couple de plans (P, P') tel que : $D \subset P, D' \subset P'$ et $P // P'$. Former une équation cartésienne de P et P'.

Exercice 5:

Déterminer la projection de la droite $D : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$ sur le plan d'équation $P : x + 2y + 3z = 6$ parallèlement a la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$.

Exercice 6:

Reconnaître l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a pour expression analytique dans le repère canonique :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$$

(montrer que c'est une affinité et donner son axe, son rapport et sa direction).

Exercice 7:

D_1, D_2, D_3 trois droites du plan d'équations cartesiennes dans un répere quelconque : $a_i x + b_i y + c_i = 0, i = 1, 2, 3$.

1. Montrer qu'elles sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

2. Application : *Théorème de Céva :*Soit (ABC) un triangle ; $R \in (AB), P \in (BC), Q \in (CA)$: en déduire que $(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes $\Leftrightarrow \overline{PB}\,\overline{QC}\,\overline{RA} = -\overline{PC}\,\overline{QA}\,\overline{RB}$ (*indication :* on pourra travailler dans le repère : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 8:

Soit (ABC) un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[B, C], [A, C], [A, B]; G$ le centre de gravité de ABC. Soit M un point du plan ,on note P, Q et R ses symétrique par rapport à A', B', C' , et K le centre de gravité de (PQR) . Montrer que :

1. G est le milieu de $[M, K]$.
2. $[A, P], [B, Q], [C, R]$ et $[G, K]$ ont le même milieu .

Exercice 9:

(ABC) un triangle ; $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c \neq -1$, on note f l'application du plan dans lui même qui au point M associe le barycentre du système pondéré $M' = ((A, a), (B, b), (C, g), (M, 1))$. Montrer que f une application affine et que c'est soit une translation soit une homothétie.

Exercice 10:

f est un endomorphisme affine du plan tel que pour tout point M on a $f^2(M)$ est le milieu de $[M, f(M)]$; montrer que f est une affinité, quel est sont rapport ?

Exercice 11:

C_1, C_2 deux ensembles convexes du plan , montrer que l'ensemble des segments $[M_1, M_2]$ tel que : $(M_1, M_2) \in C_1 \times C_2$, est convexe.

Exercice 12:

DS 99-2000 : Soient D et D' deux droites affines de l'espace et π un plan tels que π n 'est parallèle ni à D ni à D'. On note par q la projection sur π parallèlement à D et par p la projection sur π parallèlement à D'. Soit $\lambda \in]0,1[$ on définit l'application affine f par
$f(M) = Bar\left(p(M)(\lambda), q(M)(1-\lambda)\right)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{p} o \overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q} o \overrightarrow{p} = \overrightarrow{q}$
   (indication : on pourra travailler sur une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ choisie telle que : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ base de $\vec{\pi}$ et $\overrightarrow{e_3}$ qui dirige D.
2. Reconnaître $\overrightarrow{f}$, en déduire que f est une projection.
3. montrer que f est la projection sur π parallèlement à la droite Δ passant par le point $C = Bar\left(A(\lambda), B(1-\lambda)\right)$ où $\{A\} = D \cap \pi, \{B\} = D' \cap \pi$ et dirigée par le vecteur $\lambda\overrightarrow{e_3} + (1-\lambda)\overrightarrow{q}(\overrightarrow{e_3})$
4. Application numérique : calculer $f(M)$ si M est de coordonnes $(1,-1,1)$ dans le repère cartésien canonique si $\pi : x + 2y - 3z = 1$, D passe par $M_1(1,0,1)$ dirigée par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$ et D passe par $M_2(-1,1,1)$ dirigée par $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

Exercice 13:

DS 2000-2001 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et et $f : \xi \to \xi$ affine

1. montrer que :$\forall A \in \xi, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\xi}$ on a : $f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$
2. trouver une CNS sur $\overrightarrow{u}$ pour que $t_{\overrightarrow{u}}$commute avec une :
   (a) homothétie
   (b) symétrie
   (c) projection

Exercice 14:

Controle 2001-2002 :

1. Donner les équations cartésiennes de la droite $D = (AB)$ et du plan $\pi = (ACD)$
   où $A = (1,2,-1), B = (1,0,2), C(2,-4,3)$ et $D(-2,-1,0)$.
2. Donner l'expression analytique de $s = s_{p//D}$ dans le repère canonique
3. Calculer $s(M)$ avec $M = (1,1,1)$
4. on pose $\Re' = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ Donner l'expression analytique de $s = s_{p//D}$ dans le repère $\Re'$.
5. Donner les coordonnes de M dans $\Re'$.
6. Enoncer le théorème de changement de repère et vérifier qu'il est bien vrai sur cet exemple.
7. Reconnaître $f = h_{A,-2} o t_{\overrightarrow{AB}}$ puis calculer $f(M)$.

FIN