MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°

Jeudi le:20-Mars-2003

Espaces Affines

Dans tous les énoncés ξ désigne le plan ou l'espace réel

1. t, h sont respectivement une homothétie et une translation de ξ , déterminer la nature des applications suivantes : $tohot^{-1}, hotoh^{-1}$.

2. A, B, A', B' quatre points de ξ tel que $A \neq A', B \neq B'$ .Montrer qu'il existe f , une homothétie ou une translation telle que : $f(A) = A', f(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ proportionnels.

3. On suppose que ξ est de dimension 3.

a. Montrer que deux droite de ξ sont coplanaire si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

b. Soit D_1 et D_2 les droites d'équations : $D_1 : \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = z-1 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} x = z+2 \\ y = 3z-3 \end{cases}$ .Montrer qu'ils sont coplanaires et former une équation cartésienne du plan les contenants.

4. On considère dans IR^3 muni de sont repère canonique

:$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, D : \begin{cases} z = 0 \\ 2x+3y = 1 \end{cases}$ $D' : \begin{cases} y = 0 \\ x-2z+3 = 0 \end{cases}$ Montrer qu'il existe une unique droite D passant par A et rencontrant D et D' , et en donner une équation cartésienne .

5. $D : \begin{cases} x = z-1 \\ y = 2z+1 \end{cases}$ $D' : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}$, montrer qu'il existe un unique couple de plans (P,P') tel que : D⊂P , D'⊂P' et P // P' .Former une équation cartésienne de P et P'.

6. Déterminer la projection de la droite $D : \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-2y-z = 0 \end{cases}$ sur le plan d'équation $P : x+2y+3z = 6$ parallèlement a la droite dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Reconnaître l'application de IR^3 dans IR^3 qui a pour expression analytique dans le repère canonique :

$\begin{cases} x' = 3x+4y+2z-4 \\ y' = -2x-3y-2z+4 \\ z' = 4x+8y+5z-8 \end{cases}$ (montrer que c'est une affinité et donner sont axe sont rapport et sa direction).

8. D_1, D_2, D_3 trois droites du plan d'equations cartesiennes dans un répere quelconque: $a_i x + b_i y + c_i = 0, i = 1,2,3$.

a. Montrer qu'elles sont concourantes ou parallèles si et seulement si : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

9. Application : *Théorème de Céva*:Soit (ABC) un triangle;$R \in (AB), P \in (BC), Q \in (CA)$:en déduire que $(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes⇔ $\overline{PB}\,\overline{QC}\,\overline{RA} = -\overline{PC}\,\overline{QA}\,\overline{RB}$ (*indication*:on pourra travailler dans le repere : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

10. Soit (ABC) un triangle A', B', C' les milieux respectifs de $[B,C], [A,C], [A,B]$; G le centre de gravité de ABC .Soit M un point du plan ,on note P,Q et R ses symétrique par rapport a A' , B' , C' , et K le centre de gravité de PQR .Montrer que :

a. G est le milieu de [M,K].

A,**P** ,[B,Q],[C,R] et [G,K] ont le même milieu .

11. (ABC) un triangle ;$(a,b,c) \in IR^3$ tel que $a+b+c \neq -1$, on note f l'application du plan dans lui même qui au point M associe le barycentre du système pondéré $M' = ((A,a),(B,b),(C,g),(M,1))$.Montrer que f une application affine et que c'est soit une translation soit une homothétie

12. f est un endomorphisme affine du plan tel que pour tout point M on a $f^2(M)$ est le milieu de $[M,f(M)]$; montrer que f est une affinité, quel est sont rapport ?

13. C_1, C_2 deux ensemble convexe du plan , montrer que l'ensemble des segments $[M_1,M_2]$ tel que : $(M_1,M_2) \in C_1 \times C_2$, est convexe.

14. DS 99-2000

15. Soient D et D' deux droites affines de l'espace et π un plan tels que π n 'est parallèle ni a D ni a D.On note par q la projection sur π parallèlement a D et par p la projection sur π parallèlement a D'.Soit $\lambda \in]0,1[$ on définit l'application affine f par $f(M) = Bar(p(M)(\lambda), q(M)(1-\lambda))$

a. Montrer que $\vec{p} o \vec{q} = \vec{p},\ \vec{q} o \vec{p} = \vec{q}$ (indication : on pourra travailler sur une base $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ de IR^3 choisie telle que : $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ base de π àet $\vec{e_3}$ qui dirige D

b. Reconnaître $\vec{f}$, en déduire que f est une projection

c. montrer que f est la projection sur π parallèlement a la droite Δ passant par le point $C = Bar(A(\lambda),B(1-\lambda))$ où $\{A\} = D \cap \pi, \{B\} = D' \cap \pi$ et dirigée par le vecteur $\lambda\vec{e_3} + (1-\lambda)\vec{q}\left(\vec{e_3}\right)$

d. Application numérique :; calculer $f(M)$ si M est de coordonnes (1,-1,1) dans le repère cartésien canonique si π : x+2y-3z=1 , D passe par $M_1(1,0,1)$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et D passe par $M_2(-1,1,1)$ dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$

16. DS 2000-2001

Soit $n \in IN*$ et et $f : \zeta \to \xi$ affine

a. montrer que :∀A∈ $\xi, \forall\vec{u} \in o\vec{\xi}$ on a: $f(A+\vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$

b. trouver une CNS sur $\vec{u}$ pour que $t_{\vec{u}}$commute avec:

i. homothétie

ii. symétrie

iii. projection

17. *Controle* 2001-2002

a. Donner les équations cartésiennes de la droite D=(AB) et du plan π=(ACD) où A=(1,2,-1) , B=(1,0,2) , C(2,-4,3) et D(-2,-1,0).

b. Donner l'expression analytique de $s = s_{p//D}$ dans le repère canonique

c. Calculer s(M) avec M=(1,1,1)

d. on pose $\Re\prime = (A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ Donner l'expression analytique de $s = s_{p//D}$ dans le repère $\Re'$.

e. Donner les coordonnes de M dans $\Re'$

f. Enoncer le théorème de changement de repère et vérifier qu'il est bien vrai sur cet exemple

g. Reconnaître $f = h_{A,-2} o t_{\overrightarrow{AB}}$à puis calculer $f(M)$