MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N°25

Lundi le:05-Mai-2003

Espaces Vectoriels Euclidiens

1. completer $\vec{u} = \frac{\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{5}}$ en une b.o.n de IR^3
2. Donner dans la base canonique de IR^3 la matrice de la projection orthogonale sur $F = Vect\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\vec{k}\right)$
3. Reconnaitre les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de IR^3 sont
:$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$
4. Montrer que les endomorphismes de IR^3 qui concervent le produit vectoriel sont exactement ceux qui concervent la norme et de determinant égal a 1
5. Montrer que $\forall\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \in IR^3 : \vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$ *Formule du produit mixte*
6. Soit E ev euclidien , $n \in IN^*, (u_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n$ tels que $\|u_i\| = 1, \forall i \in [|1,n|]$ et $\forall x \in E : \|x\| = \sum_{0\leq i\leq n}\langle x,u_i\rangle^2$
montrer que $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une b.o.n
7. *Polynômes de Tchebychev*: On pose pour n entier et $-1 \leq x \leq 1$,$T_n(x) = cos(nArccos(x))$
   - **a**. montrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.
   - **b**. pour $f,g : [-1,1] \to IR$ continues ,on pose $< f,g >= \int_{[-1,1]} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$, montrer que c'est bien defini et qu'ainsi on muni C([-1,1],IR) d'un produit scalaire.
   - **c**. montrer que la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.
   - **d**. En deduire $\min_{(a,b)\in IR^2} \int_{[-1,1]} \frac{(t^2+at+b)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$
8. *Polynômes de Laguerre* : On pose pour n entier et x réel : $L_n(x) = (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$
   - **a**. donner L_0, L_1, L_2.
   - **b**. pour $f,g : IR \to IR$ fonctions polynomiales ,on pose $< f,g >= \int_{[0,+\infty]} f(t)g(t)e^{-t}dt$, montrer que c'est bien définie.et qu'ainsi on muni $IR[X]$ d'un produit scalaire.
   - **c**. démontrer la formule suivante dite *formule d'intégration par partie generalisée* a l'ordre n:si $n \in IN$, $a > b$ deux réels et $f,g : [a,b] \to IR$ de classe C^n , alors
   :$\int_{[a,b]} f(t)g^{(n)}(t)dt = \sum_{0\leq k\leq n}[(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-k-1)}(t)]_a^b + (-1)^n \int_{[a,b]} g(t)f^{(n)}(t)dt.$
   - **d**. montrer que si $k < n$ alors $[(x^n e^{-x})^{(k)}]_{x=0} = 0$.
   - **e**. en déduire que si $k < n$ alors :$< L_k, L_n >= 0$, puis que $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.
   - **f**. pour toit entier k ,on pose $I_k = \int_{[0,+\infty]} t^k e^{-t}dt$, montrer que $I_{k+1} = (k+1)I_k$, puis en déduire la valeur de I_k
   - **g**. pour tout entiers k et n ,en déduire $\|L_k\|$ puis donner une b.o.n de $IR_n[X]$
   - **h**. En deduire $\min_{(a,b)\in IR^2} \int_{[-1,1]} (t^2+at+b)^2 e^{-t}dt$
9. *DS* 9 2001-2002 : On munit $IR_2[X]$ du produit scalaire suivant $< P,Q >= \int_{[0,1]} P(t)Q(t)dt,$ Pour tout $P \in IR_2[X]$ on pose $\varphi(P)(X) = (X^2 - X)P''(X) + (2X-1)P'(X)$ et $s(P)(X) = P(1-X)$
   - **a**. montrer que φ, s sont des endomorphismes de $IR_2[X]$ sont ils bijectifs ?
   - **b**. montrer que $\forall k \in \{0,1,2\}, \exists! L_k \in IR_2[X] / deg(L_k) = k, co(L_k) = 1, \varphi(L_k) = k(k+1)L_k$
   - **c**. montrer que $\forall (P,Q) \in IR_2[X]^2$ on a : $< \varphi(P),Q >=< P,\varphi(Q) >$ e,$< s(P),Q >=< P,s(Q) >$
   - **d**. en déduire que $\{L_0,L_1,L_2\}$ est une base orthogonale de $IR_2[X]$
   - **e**. en utilisant c. Dire pourquoi les matrices de φ, s dans $\{L_0,L_1,L_2\}$ sont symétriques , expliciter ensuite ces matrices.
   - **f**. Montrer que s est une réflexion préciser par rapport a quel plan