Série 25 : *Courbe planes paramétrées*

Jeudi 27 Juin 2004

Exercice 1:

Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = a(1+\cos t) \\ y(t) = a\sin t \end{cases} \quad a > 0$$

(a) Reconnaitre la nature géometrique de (γ)

(b) Soit (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a (γ). Donner une repésentation paramétrique de (Γ) .

(c) En déduire une équation polaire de (Γ)

(d) Soit M un point de (Γ) d'angle polaire $\theta, \overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M à (Γ) orienté dans le sens des θ croissants,exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\tau}}\right)$,en déduire les poins de (Γ) où la tangente est verticale ou horizontale.

Exercice 2:

Soit D_α la droite passant par O d'angle polaire $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.Montrer que D_α recoupe (Γ) en deux points M_α, M'_α Calculer la longueur du segment $[M_\alpha, M'_\alpha]$ Déterminer le lieu H des milieux de $[M_\alpha, M'_\alpha]$ quand $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ En déduire une construction géomterique des points M_α, M'_α

---

iii. **Exercice 3:**

Soit (γ) arc géométrique plan tel que :$\forall M \in (\gamma)$ on a : l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où C est le centre de courbure de (γ) au point M.

(a) Si α désigne l'angle entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M montrer que : $x^2 + y^2 - \left(x\frac{dy}{d\alpha} - y\frac{dx}{d\alpha}\right)$.

(b) Si θ désigne l'angle entre la droite (OM) et l'axe (Ox), β celui entre la droite (OM) et la tangente à (γ) au point M, montrer que $\frac{d\theta}{da}$.et que $(\beta) = \frac{r}{r'}$(on pourra utiliser les coordonnes polaires avec $r = OM$).

(c) En déduire que (γ) est une spirale.

Exercice 4:

Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sqrt{\cos t} \\ y - t) = \sqrt{\sin t} \end{array} \right. \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coincide avec l'origine .

Exercice 5:

Déterminer les courbes pour lesquelles $\widehat{MOC} = \frac{\pi}{2}, C$ centre de courbure au point M de la courbe.

Exercice 6:

Soit (γ) courbe plane parametrée de classe $\wp^3, (\gamma_1)$ l'ensemble des centre de courbure de (γ) ,si $M \in (\gamma), C$ centre de courbure de (γ) au point M, C_1 centre de courbure de (γ_1) au point C, I le milieu de $[M, C], (\gamma_2)$ l'ensemble de ces milieux; montrer que la tangente a (γ_2) au point I est orthogonal a $\overrightarrow{MC_1}$.

Exercice 7:

Soit (γ) courbe plane parametrée de classe $\wp^1$,a tout point M de (γ) on associé la projection orthogonale H de O sur la tangente en M a (γ), soit (γ_1) l'ensemble de ces projections , montrer que la normale à (γ_1) en H contient le milieu de $[O, M]$.

Exercice 8:

Soit $(\gamma), (\gamma')$ deux cercles de centres $\Omega(1, 0)$ et $\Omega'(-R, 0)$ et de rayons 1 et R respectivement.

(a) Donner l'équation de la tangente à (γ) au point $M(1 + \cos(\theta), \sin(\theta))$

(b) Ecrire une CNS sur R et θ pour que cette droite reste tangente à (γ') aussi, donner les coordonnés du point de contact $P \in (\gamma')$.

(c) Déterminer le lieu géometrique des milieux de $[M, P]$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc